Teilgraphen hoher Konnektivität

Sischerheit kennt keine Grenzen!

Henning Thomas

Sommerakademie Görlitz 2007

September 16, 2007

Outline

Outline

Graphen

Definition

Ein gerichteter Graph $G = (V_G, E_G)$ besteht aus

- einer Menge V_G von Knoten,
- einer Menge $E_G \subseteq V_G \times V_G$ von Kanten.

Definition

Bei einem ungerichteten Graphen $G = (V_G, E_G)$ gilt $E_G \subseteq \binom{V_G}{2}$.

Definition

Ein gewichteter Graph $G = (V_G, E_G, \omega_G)$ ist ein Graph (V_G, E_G) mit einer Funktion $\omega_G : E_G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Zusammenhängende Graphen I

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V_G, E_G)$ heißt λ-fach kantenzusammenhängend ($\lambda \in \mathbb{N}$), falls

- für alle $v_1, v_2 \in V_G$ mindestens λ Kanten-unabhängige Pfade von v_1 zu v_2 existieren

oder äquivalent dazu

- das Entfernen von $\lambda - 1$ beliebigen Kanten den Graphen zusammenhängend lässt.

Zusammenhängende Graphen II

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V_G, E_G)$ heißt λ-fach knotenzusammenhängend, falls

- für alle $v_1, v_2 \in V_G$ mindestens λ Knoten-unabhängige Pfade von v_1 zu v_2 existieren.

Definition

Ein gerichteter Graph $G = (V_G, E_G)$ heißt stark zusammenhängend, falls für alle $v_1, v_2 \in V_G$ ein gerichteter Pfad von v_1 zu v_2 existiert.

Outline

Zusammenhangs-Probleme

Gegeben sei ein ungerichteter (gewichteter) Graph G und $\lambda \in \mathbb{N}$.

Kantenzusammenhangs-Problem

Finde den minimalen (minimal gewichteten) Teilgraphen von G, der λ-fach kantenzusammenhängend ist.

Knotenzusammenhangs-Problem

Finde den minimalen (minimal gewichteten) Teilgraphen von G, der λ-fach knotenzusammenhängend ist.

Gegeben sei ein gerichteter, ungewichteter Graph G und $\lambda \in \mathbb{N}$.

Starken-Zusammenhangs-Problem

Finde den minimalen Teilgraphen von G, der stark zusammenhängend ist.

Im allgemeinen Fall sind diese Probleme NP-schwer.

Zusammenhangs-Erweiterung

Gegeben ist ein gewichteter, ungerichteter Graph G, $\lambda \in \mathbb{N}$ und ein Ausgangsgraph $H \subseteq G$.

Kantenzusammenhangs-Erweiterungs-Problem

Finde den minimalen Teilgraphen $G_0 \subseteq G$, so dass

- $H \subseteq G_0$ und
- G_0 λ-fach kantenzusammenhängend ist.

Knotenzusammenhangs-Erweiterungs-Problem

Finde den minimalen Teilgraphen $G_0 \subseteq G$, so dass

- $H \subseteq G_0$ und
- G_0 λ-fach knotenzusammenhängend ist.

Auch diese Probleme sind NP-schwer für $\lambda \geq 2$.

Resultate

Im Folgenden werden Approximationsalgorithmen für die genannten Probleme vorgestellt mit Approximationsgüten von

	gewichtet	ungewichtet
Kantenzusammenhang	2	$2 - 1/\lambda$
Knotenzusammenhang	$2H(\lambda)$	$2 - 1/\lambda$

Starken-Zusammenhangs-Problem:

- hohe Laufzeit: 1,61
- fast lineare Laufzeit: 1,75

Zusammenhangs-Erweiterung für $\lambda = 2$:

- Kantenzusammenhang: 2
- (Knotenzusammenhang: 2)

Outline

Hilfsalgorithmus

Wir benutzen als Fakt, dass es einen Algorithmus gibt (siehe [E79], [G91]), der in polynomieller Zeit das folgende Optimierungsproblem exakt löst:

- Gegeben sei ein gewichteter, gerichteter Graph G^D, eine feste Wurzel $r \in V_{G^D}$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{N}$.
- Finde einen minimal gewichteten Teilgraphen H^D, der für alle $v \in V_{G^D}$ mindestens λ kantenunabhängige Pfade von r zu v hat.

Der Algorithmus

Gegeben sei ein gewichteter, ungerichteter Graph G und eine Zahl λ.

Weighted Edge-Connectivity

- Wandle G kanonisch in einen gewichteten, gerichteten Graphen G^D um.
- Wende den Hilfsalgorithmus auf G^D an und erhalte $H^D \subseteq G^D$.
- Wandle H^D kanonisch in einen gewichteten, ungerichteten Graphen $H \subseteq G$ um.
- Gib H zurück.

Approximationsgüte

Lemma

Der Ausgabegraph $H \subseteq G$ ist λ-fach kantenzusammenhängend.

Lemma

$$\omega_G(E_H) \leq 2\mathcal{OPT}$$

Proof.

- Wir übertragen eine optimale Lösung auf G^D.
- Wir erhalten einen Teilgraphen von G^D mit λ kantenunabhängigen Pfaden von r zu jedem anderen Knoten in V_{G^D} und Gewicht $2\mathcal{OPT}$.
- Daraus folgt $\omega_G(E_H) \leq 2\mathcal{OPT}$.

□

Outline

Einleitung

- Gegeben sei ein ungerichteter, ungewichteter Graph G.
- Es gibt einen Algorithmus (siehe [NI92]), der einen λ-fach kantenzusammenhängenden Teilgraphen mit höchstens $\lambda|V_G|$ Kanten ausgibt.
- Da in einer optimalen Lösung jeder Knoten mindestens Grad λ haben muss, gilt
$$\mathcal{OPT} \geq \frac{\lambda|V_G|}{2}.$$
- Damit erhalten wir eine Approximationsgüte von 2.

Wir wollen nun eine Approximationsgüte von $2 - \frac{1}{\lambda}$ erreichen.

Idee

(1) Finde einen "guten" 2-fach kantenzusammenhängenden Graphen.

(2) Erweitere diesen Graphen schrittweise bis zum λ-fach Kantenzusammenhang.

Punkt 1 (Ein "guter" 2-fach zusammenhängender Graph)

Extended DFS

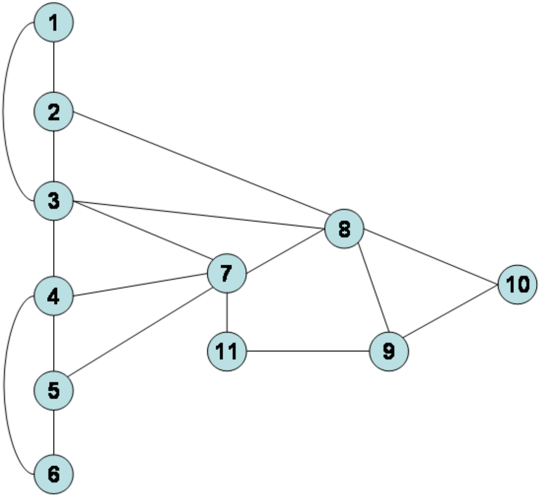
- Führe eine DFS durch mit folgender Erweiterung:
- Falls beim Verlassen eines Knotens v die Kante (v, u) von v zu seinem Vorgänger u im DFS-Baum eine Brücke ist, füge die bestmögliche Kante zur "Absicherung" von (v, u) hinzu.

Lemma

Der Algorithmus hat eine Approximationsgüte von $\frac{3}{2}$.

Beweis anhand eines Beispiels auf der nächsten Folie.

Ein Beispiel



Beweis (Fortsetzung)

Wir haben

- $\mathcal{OPT} \geq 2k$, wobei k die Anzahl der hinzugefügten Rückkanten ist
- $\mathcal{OPT} \geq n$

Daraus folgt ...

Die Anzahl der Kanten im Ausgabegraphen ist genau $n-1+k$. Es gilt:

$$\frac{n-1+k}{\mathcal{OPT}} \leq \frac{n-1+k}{\max(n, 2k)}.$$

Falls $n \geq 2k$: $\leq \frac{n-1+(n/2)}{n} \leq \frac{3}{2}$.

Falls $n < 2k$: $\leq \frac{2k-1+k}{2k} \leq \frac{3}{2}$.

Erweiterung des 2-zusammenhängenden Graphen

UNWEIGHTED EDGE-CONNECTIVITY

Eingabe: ungerichteter, ungewichteter λ-fach kantenzusammenhängender Graph G und $\lambda \in \mathbb{N}$

- Finde $H_2 \subseteq G$ als 2-zusammenhängenden Graphen mit EXTENDED DFS.
- **for** $i = 3, \ldots, \lambda$
  Finde einen maximal spannenden Wald W_i in $G - H_{i-1}$
  Setze $H_i = H_{i-1} \cup W_i$

Anmerkung: Mit einem geschickten Algorithmus kann der zweite Schritt sogar in einer Iteration durchgeführt werden. Damit hat der gesamte Algorithmus lineare Laufzeit!

Korrektheit

Lemma

Der Ausgabegraph H_λ ist λ-fach kantenzusammenhängend.

Proof.

- Angenommen, diese wäre nicht der Fall und es ex. ein Schnitt S der Grösse $c < \lambda$.
- Dieser Schnitt teilt den Graphen in zwei Teile G_1, G_2.
- In mindestens einer Iteration j wurde keine Kante aus S hinzugefügt.
- Da G λ-zusammenhängend ist, ex. in G noch eine Kante zwischen G_1 und G_2.
- Diese Kante wäre in Iteration j hinzugefügt worden, da in jeder Iteration ein maximal spannender Wald gefunden wird.

□

Approximationsgüte

Lemma

Der Algorithmus hat eine Approximationsgüte von $2 - \frac{1}{\lambda}$.

Proof.

- Die Anzahl der Kanten des Ausgabegraphen ist höchstens $n - 1 + k + (\lambda - 2)(n - 1)$.
- Zudem gilt $\mathcal{OPT} \geq \frac{\lambda n}{2}$ und $\mathcal{OPT} \geq \lambda k$.
- Damit erhalten wir eine Approximationsgüte von

$$\frac{n - 1 + k + (\lambda - 2)(n - 1)}{\max(\lambda k, \frac{\lambda n}{2})} \leq \cdots \leq 2 - \frac{1}{\lambda}$$

$\square$

Outline

Anmerkungen zum Knotenzusammenhangs-Problem

- Idee ähnlich wie beim **Kanten**zusammenhangsproblem
- Modifikation von EXTENDED DFS nötig, um 2-fachen **Knoten**zusammenhang zu garantieren.
- Speziellere Wahl der Wälder in der zweiten Phase nötig (Breitensuche-Wälder), um λ-fachen **Knoten**zusammenhang zu garantieren

Outline

Idee

Ziehe immer wieder längste Kreise im Graphen zusammen, bis nur noch ein Knoten übrig bleibt.

Definition

Eine Kante $(u, v) \in E_G$ zusammenzuziehen bedeutet die Knoten u und v durch einen einzelnen Knoten zu ersetzen und evtl. entstandene Schleifen oder Mehrfachkanten durch einfache Kanten zu ersetzen.

Eine Menge von Kanten zusammenzuziehen bedeutet die Kanten in einer beliebigen Reihenfolge zusammenzuziehen.

Der Algorithmus

$\textsc{Contract-Cycles}_k(G)$

for $i = k, k-1, k-2, \ldots, 2$
    while (Der Graph enthält einen Kreis der Länge $\geq k$)
        Ziehe die Kanten eines solchen Kreises zusammen.
gib die zusammengezogenen Kanten **zurück**

Analyse I

Lemma

Sei G ein gerichteter stark-zusammenhängender Graph mit n Knoten und längstem Kreis der Länge c. Dann gilt:

$$\mathcal{OPT} \geq \frac{c}{c-1}(n-1)$$

Proof.

- E sei die Kantenmenge einer opt. Lösung.
- Ziehe nach und nach Kreise in $C_1, C_2, \ldots, C_n$ in der optimalen Lösung zusammen.
- Es gilt:

$$|E| = (n-1)\frac{|E|}{n-1} = (n-1)\frac{\sum_i |C_i|}{\sum_i(|C_i|-1)} \geq (n-1)\frac{c}{c-1}$$

□

Analyse II

- Setze $n = |V_G|$ und bezeichne mit n_i die Anzahl der Knoten, die nach dem Zusammenziehen von Kreisen der Länge i übrig sind.
- Setze $E = \textsc{Contract-Cycles}_k(G)$. Es gilt:

$$|E| \leq \frac{k}{k-1}(n - n_k) + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{i}{i-1}(n_{i+1} - n_i)$$

- Für $\mathcal{OPT}(G)$ gilt zudem:

$$\mathcal{OPT}(G) \geq n \text{ und } \mathcal{OPT}(G) \geq \frac{i-1}{i-2}(n_i - 1)$$

Daraus folgt

Lemma

$|E| \leq c_k \cdot \mathcal{OPT}(G)$, *wobei* $\frac{\pi^2}{6} \leq c_k \leq \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{(k-1)k}$.

Übersicht der Approximationsgüten

k	Upper Bound	Lower Bound
3	1.750	1.750
4	1.694	1.666
5	1.674	1.625
∞	1.645	1.500

Outline

Idee

- Wir führen $\textsc{Contract-Cycles}_3$ aus. Dieser besteht aus 2 Phasen:
  (1) Finden und Zusammenziehen aller Kreise der Länge ≥ 3.
  (2) Zusammenziehen der übrigen Kreise der Länge 2.
- Phase (2) ist trivial.
- Ziel: Phase (1) möglichst schnell erledigen.
- Dies kann mit einer modifizierten DFS und einer union-find Datenstruktur für die Knoten gemacht werden.
- Der resultierende Algorithmus hat Laufzeit $\mathcal{O}(|E|\alpha(|E|,|V|))$, wobei $\alpha(m,n)$ die inverse Ackermann-Funktion ist.

Outline

1. Einleitung
   - Einige Definitionen
   - Vorstellung der Probleme / Resultate
2. Kantenzusammenhangs-Probleme
   - Der gewichtete Fall
   - Der ungewichtete Fall
   - Knotenzusammenhangs-Problem (Anmerkung)
3. Starken-Zusammenhangs-Problem
   - Ein 1,61-Approximationsalgorithmus mit hoher Laufzeit
   - Ein 1,75-Approximationsalgorithmus mit fast linearer Laufzeit
4. Zusammenhangs-Erweiterung
   - Kantenzusammenhangs-Erweiterung
   - Knotenzusammenhangs-Erweiterung

Idee

Gegeben sei ein ungerichteter, gewichteter Graph G und ein Ausgangsgraph $H \subseteq G$.

- Ziel: Finde eine minimale Erweiterung von H zu einem 2-fach kantenzusammenhängenden Graphen.
- O.B.d.A. gilt: H ist ein Baum.
- Wir werden wieder auf einen gerichteten Graphen G^D ausweichen und mithilfe einer minimalen ausgehende Verzweigung Kanten finden, die den Zusammenhang von H vergrßern.

Der Algorithmus

Konstruktion von G^D

- Nimm den Ausgangsgraphen H und wähle zufällig eine Wurzel $r \in V_H$, richte alle Kanten zu ihr aus.
- Für jede weitere Kante $\{u, v\}$ in $G - H$ füge Kanten zu G^D wiefolgt hinzu:
  - falls u Vorfahre von v: Füge (u, v) mit Gewicht $\omega(\{u, v\})$ ein
  - sonst füge zwei Kanten vom kleinsten gemeinsamen Vorfahren zu u und zu v jeweils mit Gewicht $\omega(\{u, v\})$ ein

Schritt 2

Finde ein minimale ausgehende Verzweigung E in G^D von r aus.
Setze $E_{Aug} := E - E_H$.

Korrektheit

Lemma

Falls G 2-fach kantenzusammenhängend ist, dann ist G^D stark zusammenhänged.

Lemma

Falls G 2-fach kantenzusammenhängend ist, dann ist auch $H + E_{Aug}$ 2-fach kantenzusammenhängend.

Approximationsgüte

Lemma

$$\omega(E_{Aug}) \leq 2\mathcal{OPT}$$

Proof.

- Sei E^*_{Aug} eine optimale Erweiterung.
- Erweitere den gerichteten Baum von H um die gerichteten Kanten, die durch E^*_{Aug} entstehen.
- Es entsteht ein stark zusammenhängender Graph mit Gewicht $\leq 2\mathcal{OPT}$.

$\Rightarrow$ Wir finden eine minimale ausgehende Verzweigung mit kleinerem Gewicht.

□

Anmerkung: Implementierung in $\mathcal{O}(m + n \log n)$ ist möglich.

Outline

Anmerkung

Die Idee bei der Knotenzusammenhangserweiterung mit $\lambda = 2$ ist ähnlich.

- Konstruiere einen gerichteten Graphen G^D. (komplizierter!)
- Finde eine minimale ausgehende Verzweigung und füge ausgewählte Kanten zu H hinzu.
- Rechne exakt die gleichen Lemmata für Knotenzusammenhang nach.