

## Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen I

*Letzter Abgabetermin: Montag, 27. Januar 2003 (vor der Übung)*

### Aufgabe 1

Sei  $d \in \mathbb{N}$ ,  $d \geq 2$ . Ein  $d$ -Heap ist definiert als ein vollständiger  $d$ -ärer Baum, der die Heapbedingung erfüllt. Beschreiben Sie eine Implementierung von  $d$ -Heaps, die die INSERT-Operation in Zeit  $O(\log_d n)$ , die FIND\_MIN-Operation in konstanter und die DELETE-Operation in Zeit  $O(d \cdot \log_d n)$  ermöglicht.

*Hinweis:* In einem vollständigem  $d$ -ären Baum hat jeder Knoten (mit höchstens einer Ausnahme) genau  $d$  Kinder, wobei die Knoten Ebene für Ebene von links nach rechts eingefügt werden. D.h. nur der innere Knoten, an dem zuletzt Kinder angefügt werden, darf weniger als  $d$  Kinder besitzen.

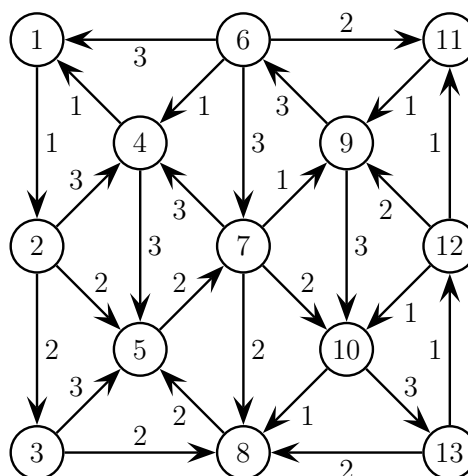
### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass eine Implementierung von Dijkstra's Algorithmus unter Verwendung von  $d$ -Heaps (vgl. Aufgabe 1) Laufzeit  $O(m \log_{2+\frac{m}{n}} n)$  hat.

*Hinweis:* Sie können voraussetzen, dass ein  $n$ -elementiger  $d$ -Heap in Zeit  $\mathcal{O}(n)$  aufgebaut werden kann.

### Aufgabe 3

Geben Sie für das folgende Netzwerk die resultierende Entfernungsmatrix an, wenn darauf der All-pairs-shortest-path-Algorithmus von Floyd angewendet wird. Geben Sie auch die Matrix an, die im Laufe des Algorithmus entsteht, wenn als Zwischenknoten die Knoten mit den Nummer kleiner gleich 6 zugelassen sind.



## Aufgabe 4

In dieser Aufgabe soll der Algorithmus von Bellman-Ford analysiert werden. Sei  $B_k[i]$  die im Algorithmus auftretende Länge eines kürzesten Pfades mit höchstens  $k$  Kanten vom Startknoten  $s$  zum Knoten  $i$ . Zeigen Sie folgende Aussage:

*Existiert in  $G$  ein Kreis mit negativer Länge (d.h. die Summe über die Gewichte in diesem Kreis ist negativ), so gibt es einen Knoten  $i$  mit  $B_n[i] < B_{n-1}[i]$ .*