

---

## Randomisierte Algorithmen

---

*Abgabetermin.* Montag, den 2.12.2002 vor der Vorlesung

### Aufgabe 1 Münzwürfe (15 Punkte)

Angenommen wir haben drei Münzen; Münze 1 hat für „Kopf“ Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ , Münze 2 bevorzugt „Kopf“ mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$  und Münze 3 bevorzugt „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$ . Für den ersten von  $n$  Münzwürfen nehmen wir Münze 1 und für die verbleibenden  $n - 1$  Würfe verwenden wir folgende Regel: ist der Ausgang des  $i$ -ten Wurfs „Kopf“, so nehmen wir für den  $i + 1$ -ten Wurf Münze 2, sonst Münze 3. Sei  $X$  die Anzahl Münzwürfe die „Kopf“ zeigen.

1. Zeigen Sie, daß jeder Münzwurf den bedingten Erwartungswert von  $X$  nur um eine Konstante ändern kann.
2. Benutzen Sie die Ungleichung von Azuma um eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Abweichens von  $X$  vom Erwartungswert zu bekommen.

**Theorem 1 (Azuma)** *Seien  $X_0, X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $|X_k - X_{k-1}| \leq c_k$  für jedes  $k = 1, \dots, n$ , wobei  $c_k$  von  $k$  abhängen kann. Dann gilt für jedes  $t \geq 0$  und  $\lambda > 0$*

$$\mathbb{P}[|X_t - X_0| \geq \lambda] \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2 \sum_{k=1}^t c_k^2}\right).$$

### Aufgabe 2 Markov-Ketten (10 Punkte)

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit Wertebereich  $\mathbb{N}$  und es bezeichnen die Zufallsvariablen  $Y_t = \min\{X_1, \dots, X_t\}$  bzw.  $Z_t = \max\{X_1, \dots, X_t\}$  das Minimum bzw. Maximum der  $X_i$  für  $1 \leq i \leq t$ .

1. Zeigen Sie, daß  $(Y_t)_{t \geq 1}$  und  $(Z_t)_{t \geq 1}$  Markov-Ketten sind.
2. Wie lauten die Übergangswahrscheinlichkeiten?
3. Skizzieren Sie die Kette.

### **Aufgabe 3 Ehrenfest Modell (15 Punkte)**

Wir betrachten einen Behälter, der durch eine Membran in zwei Hälften getrennt wird und in dem sich insgesamt  $n$  Moleküle eines Gases befinden. In jedem Zeitschritt wandert ein zufällig ausgewähltes Molekül in die andere Hälfte des Behälters. Modellieren Sie diesen Prozeß als Markov-Kette und berechnen Sie die stationäre Verteilung.

### **Übungsleitung**

Alexander Offtermatt-Souza

Raum: MI 03.09.037 – Telefon: 289-17742 – eMail: [offterma@in.tum.de](mailto:offterma@in.tum.de)