Axiome und Paradoxien der Quantenmechanik

Bernhard Ager

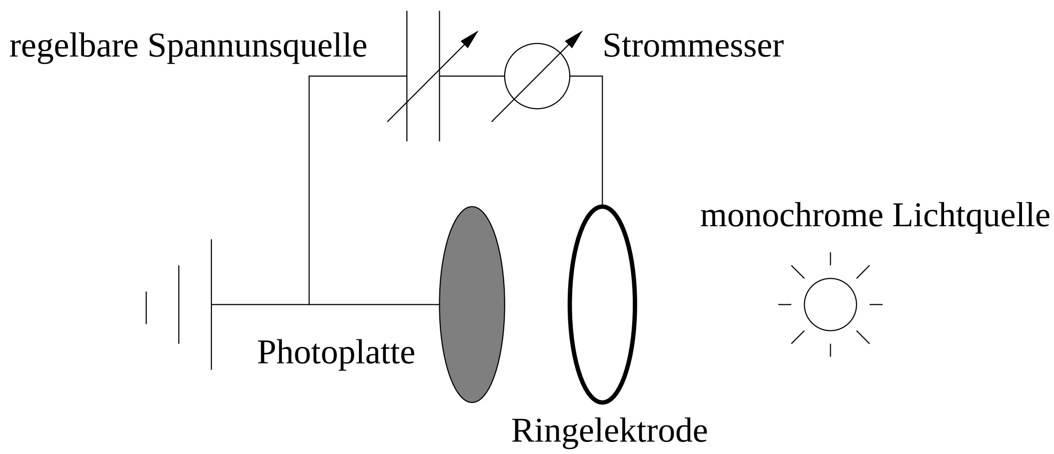
07.11.2002

- Der Bedarf einer neuen Mechanik
- Mathematische Grundlagen
- Einige Paradoxien und Beispiele

Was ist Quantenmechanik

- Ein Modell zur Beschreibung von Teilchenphänomenen, entstanden Anfang des 20. Jahrhunderts
  - Dualismus von Welle und Teilchen
  - Quantelung von Energie und Drehimpuls
- Bekannte Namen: Planck, Einstein, Bohr, Compton, Franck, Hertz, Heisenberg, de Broglie, Schrödinger und viele andere
- Experimente: Schwarzkörperstrahlung, Photoeffekt, Comptoneffekt, Doppelspalt

Photoeffekt



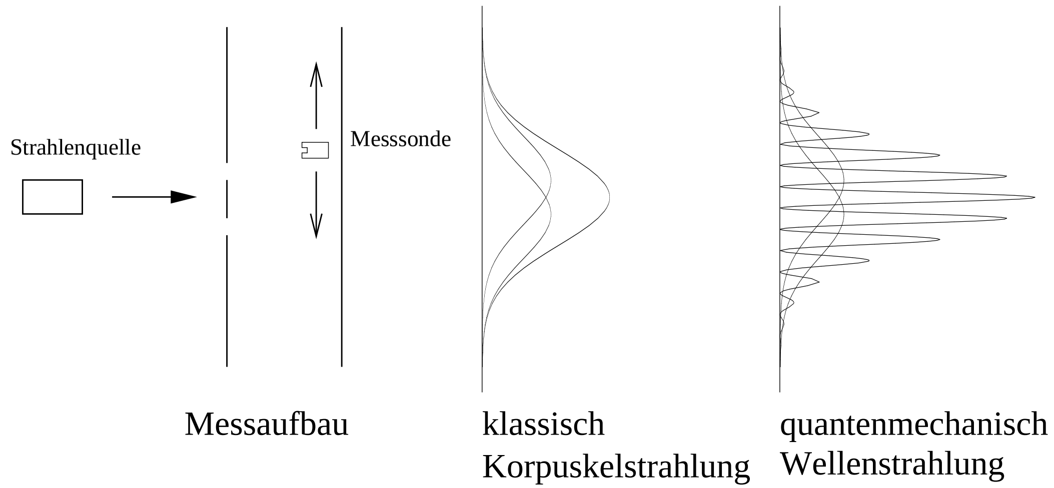
Licht auf eine metallische Photoplatte:

- Elektronen werden herausgeschlagen und von Ringelektrode eingefangen
- Messung des entstehenden Stroms in Abhängigkeit von der Spannung

- Ergebnisse:
  - zu langwelliges Licht: Kein Strom beobachtbar *Warum?*
  - falls Ringelektrode positiv ergibt sich ein Sättigungsstrom $\Rightarrow$ alle Elektronen werden abgesaugt. Die Sättigungsstromstärke hängt von der Helligkeit der Lichtquelle ab, nicht von der Farbe.
  - falls Ringelektrode negativ ergibt sich eine charakteristische Spannung, bei der der Strom zum Erliegen kommt, die nur von der Farbe der Lichtquelle abhängt.
- Schlußfolgerungen:
  - Licht besteht aus Teilchen: Photonen
  - Energie der Photonen hängt von Farbe ab und ist gequantelt

Doppelspaltexperiment

- Dualismus Welle - Teilchen
  - Wellen verhalten sich manchmal wie Teilchen
  - Teilchen verhalten sich manchmal wie Wellen
- Doppelspaltexperiment
  - ein Korpuskelstrahl oder eine Welle werden auf einen Doppelspalt gelenkt
  - es entstehen Interferenzmuster



- wenn ein Spalt abgedeckt wird entsteht eine “Normalverteilung”
- beim Aufdecken beider Spalte
  - **Klassisch:** Summe der beiden “Normalverteilungen” $\Rightarrow$ “Normalverteilung”
  - **Quantenmechanisch:** Interferenz wie bei Wellen

Paradoxien

- Egal ob man Elektronen (Teilchen) oder Licht (Welle) benutzt, die Ergebnisse sind gleich
  Äquivalenz von Teilchen und Welle?

- Abschwächen des Strahls, bis nur noch einzelne Teilchen auftreffen, ändert nichts an Verteilung
  Teilchen interferieren mit sich selbst?

- Es kann nicht bestimmt werden, durch welchen Spalt das Teilchen fliegt, wenn es interferiert. Bei dem Versuch der Messung wird die Interferenz zerstört (dazu später mehr).
  Wie kann man das erklären?

Axiome der Quantenmechanik

Hilberträume

- Vektorraum über den Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$
- inneres Produkt $\langle\psi|\varphi\rangle \to \mathbb{C}$
  - Positivität: $\langle\psi|\psi\rangle > 0$
  - Linearität: $\langle\varphi|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\psi_1\rangle + b\langle\varphi|\psi_2\rangle$
  - “schiefe” Symmetrie: $\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$
- Die Norm ist komplett: $\||\psi\rangle\| = \langle\psi|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}$, d. h. für jede Folge von Vektoren $|\psi_i\rangle$ mit $\lim_{n,m\to\infty} \||\psi_n\rangle - |\psi_m\rangle\| = 0$ existiert ein $|\psi\rangle$ so dass $\lim_{n\to\infty} \||\psi_n\rangle - |\psi\rangle\| = 0$

1. Zustand

- Ein Zustand $|\psi\rangle$ ist eine vollständige Beschreibung eines quantenmechanischen Systems.
- Er wird dargestellt als Strahl in einem Hilbertraum
  - die Länge wird normiert: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$
  - ein Phasenfaktor wird vernachlässigt: der Zustand $e^{i\alpha}|\psi\rangle,\ \alpha \in \mathbb{R}$ ist der gleiche[a] Zustand wie $|\psi\rangle$
- für jeden reinen Zustand ein Freiheitsgrad

---

[a] Vorsicht: Bei Superposition ist ein relativer Phasenfaktor sehr wohl relevant, d.h. $a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle \cong e^{i\alpha}(a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle) \ncong a|\psi\rangle + e^{i\alpha}b|\varphi\rangle$

2. Observable

Eine Observable ist (für endlichdimensionale Räume):

- eine Eigenschaft, die prinzipiell gemessen werden kann
- ein selbstadjungierter (*engl. self adjoint*) Operator: $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B}^\dagger$
  $$\Rightarrow \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^\dagger \wedge (\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$$
- Spektralzerlegung: $\mathbf{A}$ selbstadjungiert $\Rightarrow \mathbf{A} = \sum_n a_n \mathbf{P}_n$, wobei die a_n Eigenwerte und die $\mathbf{P}_n$ die Projektion auf die entsprechenden Eigenzustände von $\mathbf{A}$. Es gilt $\mathbf{P}_n \mathbf{P}_m = \delta_{n,m} \mathbf{P}_n$ und $\mathbf{P}_n^\dagger = \mathbf{P}_n$. Die $\mathbf{P}_n$ formen eine vollständige orthonormale Basis des Hilbertraums.

3. Messung

- Ergebnis einer Messung einer Observable $\mathbf{A}$ ist ein Eigenwert a_n von $\mathbf{A}$.
- Der Quantenzustand direkt nach der Messung ist der entsprechende Eigenzustand $\mathbf{P}_n$. Falls a_n nicht entartet, dann ist $\mathbf{P}_n = |n\rangle\langle n|$
- Wahrscheinlichkeit: $\mathbf{Prob}(a_n) = \|\mathbf{P}_n|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\mathbf{P}_n|\psi\rangle$
- Neuer Zustand: $|\psi'\rangle = \frac{\mathbf{P}_n|\psi\rangle}{(\langle\psi|\mathbf{P}_n|\psi\rangle)^{1/2}}$
- zwei gleiche Messungen direkt nacheinander führen zum selben Ergebnis

4. Dynamik, Operatoren

- Schrödingergleichung: $\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -i\mathcal{H}|\psi(t)\rangle$, wobei $\mathcal{H}$ selbstadjungiert ist und als Hamiltonsche bezeichnet wird.
- $\mathbf{U}(dt) = \mathbf{1} - i\mathcal{H}dt \Rightarrow \mathbf{U}(t) = e^{-i\int_0^t \mathcal{H}dt}$ ist unitär: $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$. Die Zeitevolution kann damit auch so beschrieben werden: $|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t)|\psi(0)\rangle$.
- $\mathbf{U}$ wird auch als Operator bezeichnet.

Wahrscheinlichkeiten

- die Wahrscheinlichkeitssamplitude für den Übergang von a nach e wird geschrieben als $\langle e|a\rangle$
- gibt es mehrere Möglichkeiten $m \in M$ für den Übergang, so gilt das Superpositionsprinzip $\langle e|a\rangle = \sum_{m\in M} \langle e|a_{via\ m}\rangle$
- läßt sich ein Übergang unterteilen mit einem Zwischenzustand z, so gilt $\langle e|a\rangle_{via\ z} = \langle e|z\rangle\langle z|a\rangle$
- die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang ist gleich dem Quadrat des Betrags der Wahrscheinlichkeitsamplitude: $P_{ae} = |\langle e|a\rangle|^2$

Mathematik

Vektoren

- Spaltenvektor: $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^n$
- Zeilenvektor: $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = (|\psi\rangle^*)^T = (|\psi\rangle^T)^*$
- Inneres Produkt: $\langle\psi|\varphi\rangle = \sum_{i=0}^n |\psi\rangle_i |\varphi\rangle_i$
- Norm: $\||\psi\rangle\| = (\langle\psi|\psi\rangle)^{1/2}$

Matrizen

- Matrix: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times m},\ \mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T)^* = (\mathbf{A}^*)^T$
- Unitäre Matrix: $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \mathbf{I}$
- Tensorprdukt: Seien H_n und H_m Vektorräumen mit den Basen $\{\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_n\}$ und $\{\mathbf{y}_1, \dots \mathbf{y}_m\}$
  - $H_n \otimes H_m$ ist das Tensorprodukt der Räume und hat die geordneten Paare $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ als Basis, also Dimension mn
  - Tensorprodukt der Basisvektoren: $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ = $\mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$

- Tensorprodukt beliebiger Vektoren:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbf{y}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \mathbf{x}_i \otimes \mathbf{y}_j$$

- assoziativ, aber nicht kommutativ

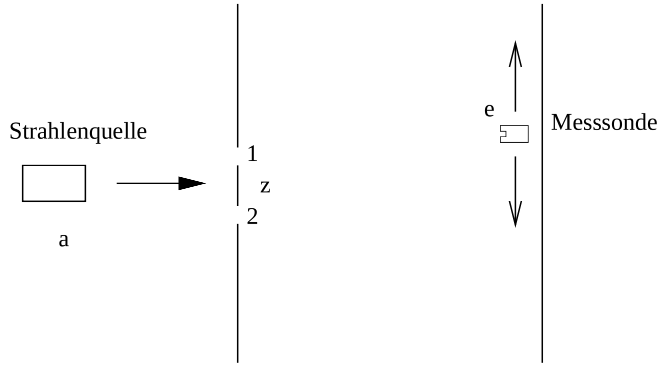
- Kroneckerprodukt (Tensorprodukt im Hilbertraum für Matrizen) wird benutzt, um Verschränkung zu beschreiben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix} : \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1s}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2s}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}\mathbf{B} & a_{r2}\mathbf{B} & \cdots & a_{rs}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Schreibweisen

- $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = |\psi\rangle|\varphi\rangle = |\psi\varphi\rangle = |\psi, \varphi\rangle$
- $\langle\psi|\mathbf{A}|\varphi\rangle = \langle\psi|\mathbf{A}\varphi\rangle = \langle\psi\mathbf{A}^\dagger|\varphi\rangle$
- Spur: $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) = \sum_i a_{ii}$

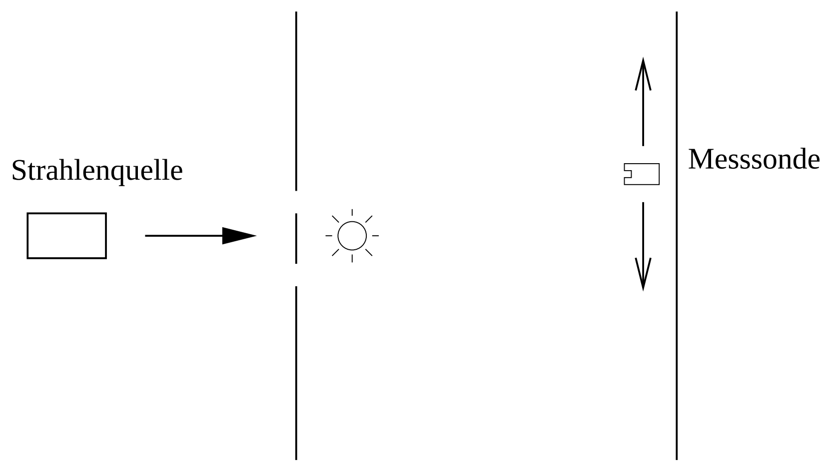
Beispiel:



$$\begin{aligned}\langle e|a\rangle &= \langle e|z\rangle\langle z|a\rangle\\ &= \langle e|1\rangle\langle 1|a\rangle + \langle e|2\rangle\langle 2|a\rangle\\ &= \langle e|1\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1|a\rangle + \langle e|2\rangle\langle 2|2\rangle\langle 2|a\rangle +\\ &\quad \langle e|2\rangle\langle 2|1\rangle\langle 1|a\rangle + \langle e|1\rangle\langle 1|2\rangle\langle 2|a\rangle\end{aligned}$$

Da $|1\rangle$ und $|2\rangle$ senkrecht aufeinander stehen sind $\langle 1|2\rangle = 0$ und $\langle 2|1\rangle = 0$

Doppelspalt II



- Messung des Orts eines Teilchens (Elektron) mit Licht.

  Erwartung:

  - Lichtblitz oben, falls Teilchen oben
  - Lichtblitz unten, falls Teilchen unten
  - Lichtblitz oben und unten, falls sich Teilchen teilt.

- Ergebnisse:
  - es wird nur ein Blitz beobachtet, entweder oben oder unten
  - die Teilchen interferieren nicht mehr.
  - $\mathbf{P}_{ae} = \mathbf{P}_{ae\ via\ 1} + \mathbf{P}_{ae\ via\ 2}$, d. h. der Zustand vor dem Doppelspalt geht verloren (Messung).
- Idee: “schwächeres” Licht: keine Veränderung der Ergebnisse, bis schließlich Teilchen nicht mehr im Spalt detektiert werden.
- Idee: langwelligeres Licht (kleinerer Impuls): Die Interferenz setzt genau dort ein, wo die Ortsauflösung eine eindeutige Zuordnung nicht mehr zuläßt.

Heisenberg’sche Unschärferelation

- Man kann bei einem Teilchen niemals Ort und Impuls gleichzeitig beliebig genau erfassen: $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2}\hbar$, wobei $h = 2\pi\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$ das Plancksche Wirkungsquantum ist.
- Diese Grenze kann prinzipiell nicht unterschritten werden.
- Auch auf andere Größen anwendbar, die zusammen die gleiche Dimension wie $\hbar$ haben, wie z.B. Energie und Zeit

Superposition

- Überlagerung von mehreren Zuständen
  - Darstellung als Linearkombination von Basiszuständen
  - Länge wird auf 1 genormt
- Beispiel: Seien $|0\rangle, |1\rangle \in \mathbb{C}^2, \langle 0|1\rangle = 0$ Basiszustände.
  - Dann ist $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ eine Superposition von beiden Zuständen.
  - Die Wahrscheinlichkeit, beim Messen (im Basissystem) auf den Zustand $|0\rangle$ (für $|1\rangle$ analog) zu kommen ist

$$\mathbf{Prob}(0) = \| |0\rangle\langle 0|\psi\rangle \|^2 = \left\| \frac{|0\rangle\langle 0|0\rangle + |0\rangle\langle 0|1\rangle}{\sqrt{2}} \right\|^2 = \frac{1}{2}$$

Verschränkung

Koppelung von ursprünglich unabhängigen quantenmechanischen Systemen. Seien die Zustände $|\psi\rangle \in H_n$ und $|\varphi\rangle \in H_m$

- Beschreibung durch Kroneckerprodukt:
  - Neuer Hilbertraum: $H_{n\otimes m} = H_n \otimes H_m$
  - Verschränkter Zustand: $|\psi\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$
  - mehr als 2 Systeme können durch Induktion über die Anzahl verschränkt werden; die Dimension des Zustandsraums steigt exponentiell
- Falls $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}|\psi_i\varphi_j\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i|\psi_i\rangle\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j|\varphi_j\rangle\right),\ \alpha_{ij} = \alpha_i\beta_j$, dann heißt der Zustand zerlegbar, ansonsten verschränkt

Worin liegt die Mächtigkeit der Quantenmechanik

- Rechnen in Superposition: Wenn man den Quantenrechner geeignet vorbereitet, dann kann man mit allen Eingabemöglichkeiten gleichzeitig rechen, d. h. bei n Qubits sind das 2^n Zustände, mit denen gleichzeitig gerechnet wird.

- Zumindest eine “Berechnung” funktioniert mit Quantencomputern, die mit klassischen Rechnern nicht funktioniert: Bells Ungleichtheit im EPR-Paradoxon (1964, 1966)
  - Charlie erzeugt verschänkte Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im Zustand $|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$ bezüglich der z-Achse, die er an Alice und Bob in y-Richtung sendet.

- Alice und Bob messen gleichzeitig mit zufälligen Winkeln Φ_A, Φ_B zur z-Achse in der x-z-Ebene
- Es ergibt sich eine Korrelation zwischen den gemessenen Ergebnissen von $\sin^2\left(\frac{(\Phi_A - \Phi_B)}{2}\right)$
- Diese Korrelation besteht, obwohl keine Information zwischen den Teilchen ausgetauscht werden kann, da der Austausch mit Überlichtgeschwindigkeit stattfinden müßte.
- Änliches Verfahren wird mit verschränkten Photonen für Quantenkryptographie genutzt:
  * 2 vorab verabredete Winkel, orthogonal
  * Parallel klassische Übertragung
  * in 50% der Fälle Übereinstimmung der Winkel $\Rightarrow$ Daten können als One-Time-Pad benutzt werden.

Zusammenfassung

- Axiome: Zustand, Observable, Messung, Dynamik
- Prinzipien: Superposition, Verschränkung, Unschärferelation
- Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bracket-Notation, besondere Matrizen, Tensorprodukt, Schreibweise
- Beispiele: Photoeffekt, Doppelspalt, EPR-Paradoxon, Quantenkryptographie
- Paradoxien: Welle-Teilchen-Dualismus, Quantelung, Selbstinterferenz, Unschärfe