Vortrag Nr. 2

Qubits – Interferenz – Verschränkung – Messung

14. November 2002

Referent: Christoph Mühlich
(muehlich@in.tum.de)

Betreuer: Hanjo Täubig
(taeubig@in.tum.de)

Einführung

- Viele Effekte und Möglichkeiten der Quantenmechanik beruhen auf den Phänomenen der Interferenz und Verschränkung

- Qubits bilden das quantenmechanische Pendant zum klassischen Bit

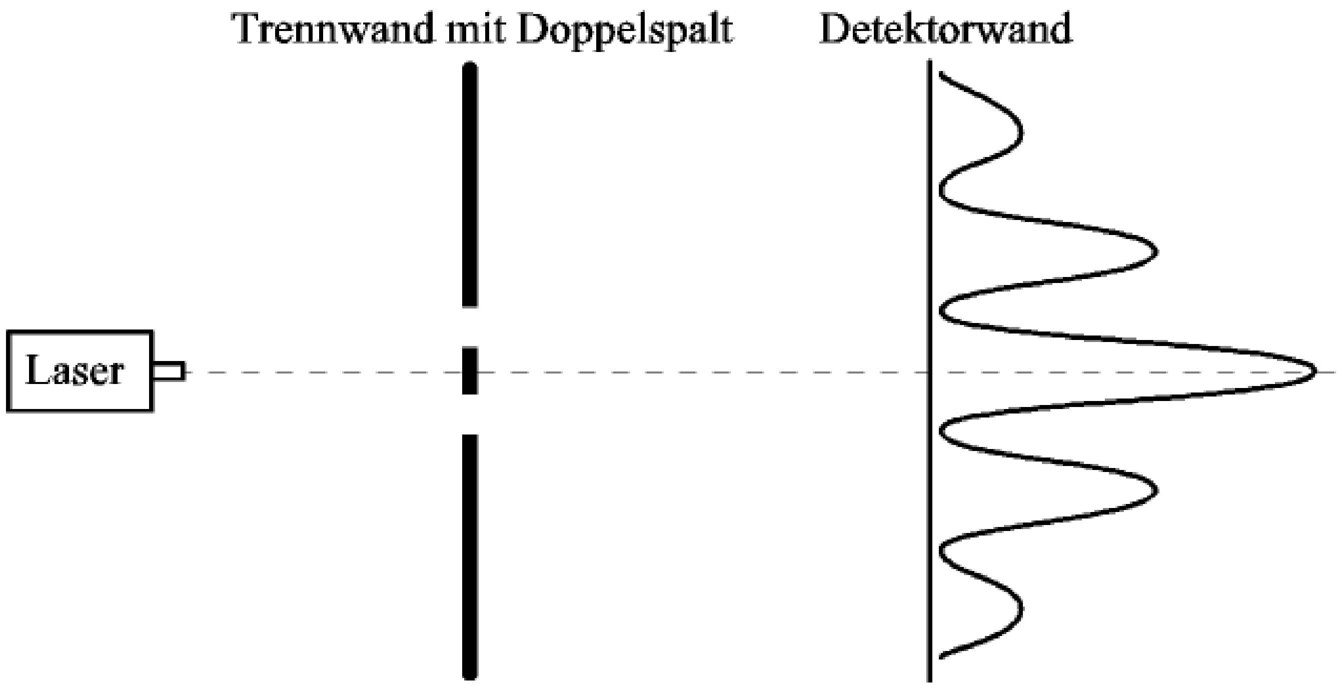
- Das Messen von Zuständen gestaltet sich bei Quanteneffekten schwieriger als in der klassischen Welt und birgt weitere Probleme in sich

Interferenz

Interferenz ist eines der beliebtesten Beispiele für quantenmechanische Effekte.

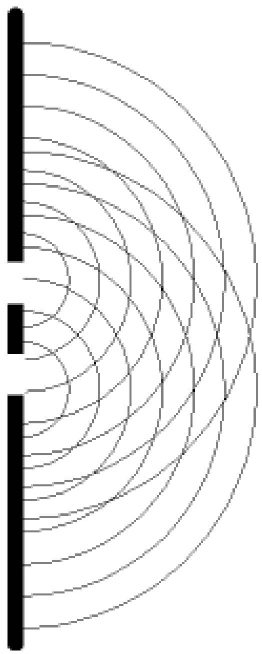
In weiten Teilen lässt sie sich klassisch mit Hilfe des Wellenverhaltens von Licht erklären.

Was ist Interferenz?



Erklärung des Interferenzmusters mit Hilfe der Welleneigenschaft des Lichtes:

An den Spalten entstehen zwei neue Lichtwellen, die sich durch gegenseitige Überlagerung beeinflussen:

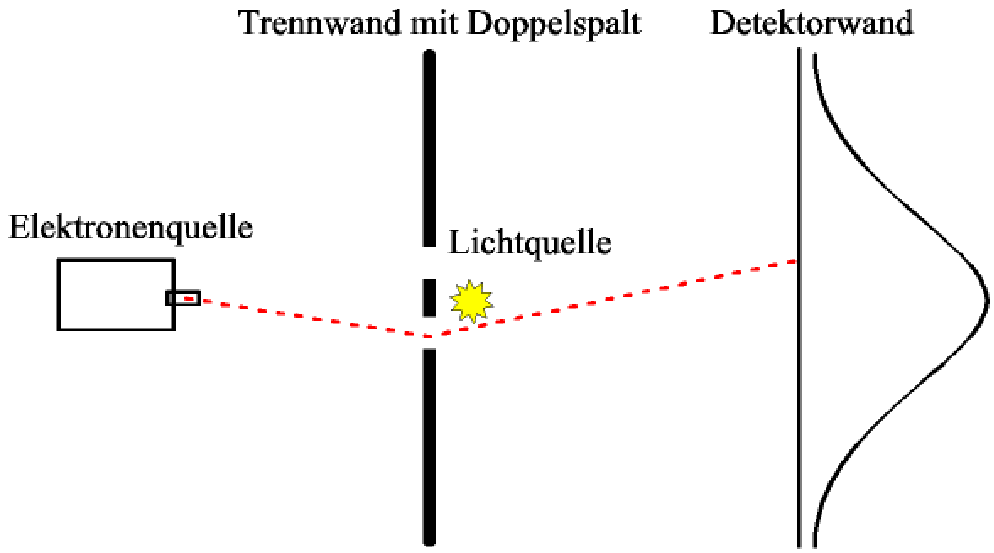


Wellenberg + Wellenberg = Lokales Maximum
(konstruktive Interferenz)

Wellental + Wellental = Lokales Minimum
(destruktive Interferenz)

Frage: Was aber passiert, wenn keine Welle vorhanden ist, sondern nur langsam nacheinander einzelne Photonen oder Elektronen?

Antwort: Dasselbe!



Einbringen einer Möglichkeit zur Feststellung des Weges einzelner Elektronen

Ergebnis: Es tritt keine Interferenz mehr auf!

Sobald man (egal auf welche Weise) entscheiden kann, welchen Weg das Teilchen durch den Doppelspalt genommen hat, tritt keine Interferenz mehr auf. In diesem Moment verhält sich das Teilchen, wie man es von einem Teilchen erwarten würde. Im anderen Fall verhält sich das Teilchen wie eine Welle.

Die Feynman Regeln für Interferenz

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem idealen Experiment ist gleich dem Quadrat des Absolutbetrages einer komplexen Zahl, der so genannten Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$P_1 = \left|\Phi_1\right|^2$$

2. Gibt es für das Auftreten eines Ereignisses mehrere alternative, ununterscheidbare Möglichkeiten, so ist die Gesamtwahrscheinlichkeitsamplitude gleich der Summe der verschiedenen einzelnen Wahrscheinlichkeitsamplituden: man erhalt Interferenz.

$$\Phi_{12} = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$P_{12} = \left|\Phi_1 + \Phi_2\right|^2$$

3. Kann im Experiment festgestellt werden, welche der alternativen Möglichkeiten tatsächlich gewählt wurde, so ist die Gesamt-Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten: die Interferenz ist zerstört.

$$\begin{aligned} P_{12} &= \left|\Phi_1\right|^2 + \left|\Phi_2\right|^2 \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned}$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Aussage:

Je genauer der Ort eines Teilchens bestimmt ist, desto ungenauer kann der Impuls bestimmt werden.

Formel:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{4p}$$

Erklärung des Interferenzmusters beim Einfachspalt:

Beim Durchgang durch den Spalt ist der Ort des Teilchens sehr genau bestimmt, daraus resultiert eine große Unbestimmtheit des Impulses. Es kann (für ein konkretes Teilchen) nicht vorhergesagt werden, wohin es gehen wird. Man kann nur eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Weges machen.

Qubits

Qubits sind das quantenmechanische Pendant zum klassischen Bit.

Verwendet werden Teilchen eines Zwei-Zustand-Systems (z.B. ein Spin ½ Teilchen, Ionen mit zwei Energieniveaus oder Polarisation von Photonen)

Die Darstellung erfolgt analog zum klassischen Bit:

$$|0\rangle \quad \& \quad |1\rangle \quad \textit{wobei} \quad \langle y | y \rangle = 1, y \in \{0,1\}$$

Ein solches System wird durch eine Linearkombination eines reinen Zustands im zweidimensionalen, komplexen Hilbertraum beschrieben:

$$|y\rangle_1 = a|0\rangle + b|1\rangle = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad a, b \in C, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Die Absolutquadrate der komplexen Zahlen α und β werden als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst, das System im entsprechenden Zustand zu finden.

Entsprechend beschreibt man Zustände mit N Qubits: $\left|y\right\rangle_{(N)} \in C^2 \otimes \ldots \otimes C^2$

Die Dimension des Hilbertraumes H zur Beschreibung der N Qubits wächst exponentiell mit der Anzahl der Qubits: $Dim(H) = 2^N$

Qubits haben eine Reihe ausgezeichneter Eigenschaften:

- Die Basiszustände können sich überlagern

- Bei kohärenter Überlagerung entwickelt sich das System gleichzeitig auf verschiedenen Wegen und zeigt Interferenz

- Qubits können eine nicht-lokale Korrelation eingehen (Verschränkung), wobei die Qubits nicht getrennt durch reine Zustände beschrieben werden können

$$\left|EPR\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle\right) \neq \left|y_A\right\rangle \otimes \left|y_B\right\rangle$$

Dynamische Entwicklung von Qubits

Die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems wird durch die Schrödinger-Gleichung bestimmt:

$$H\left|y\right\rangle = i\frac{h}{2p}\frac{d}{dt}\left|y\right\rangle$$

H ist der so genannte Hamiltonoperator, in dem die „Umwelteigenschaften“, also die beeinflussenden Parameter des Systems enthalten sind.

H ist eine hermitsche komplexe Matrix, deren Bestimmung in der Praxis im Allgemeinen sehr schwierig ist.

Rechnen mit Qubits

Das Rechnen mit Qubits gestaltet sich ähnlich wie mit klassischen Bits, allerdings mit einem signifikanten Unterschied:

<u>Operationen mit Qubits müssen immer reversibel sein!</u>

Nachweis:

Zustand vorher Zustand nachher

$$|y_1\rangle = a_1|0\rangle + b_1|1\rangle \quad \Rightarrow \quad |y_2\rangle = a_2|0\rangle + b_2|1\rangle$$

Die Operation lässt sich schreiben als

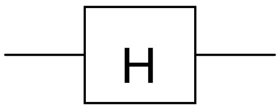
$|y_1\rangle U = |y_2\rangle$, wobei U eine komplexe Transformationsmatrix ist.

Es muss gelten: $|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1 \quad und \quad |a_2|^2 + |b_2|^2 = 1$

Es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung nur mit einer unitären Transformations-matrix erfüllt ist und daraus folgt sofort, dass die Operation reversibel sein muss.

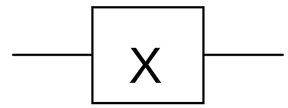
Einige quantenmechanische Gatter:

Das Hadamard-Gate:



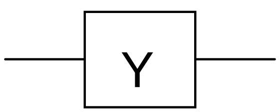
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Das Pauli-X-Gate:



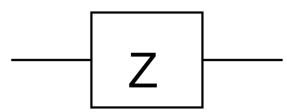
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Pauli-Y-Gate:



$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Das Pauli-Z-Gate:



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Verschränkung

Quantenmechanische Teilchen können eine Korrelation eingehen, die Verschränkung (engl.: Entanglement) genannt wird.

Die Teilchen sind dann nicht mehr getrennt voneinander zu betrachten, sondern nur noch mit einer gemeinsamen Zustandsfunktion zu beschreiben.

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$$

Diese Zustandsfunktion ist nicht faktorisierbar, d.h. sie lässt sich nicht schreiben als

$$|y\rangle = |y_A\rangle \otimes |y_B\rangle$$

Nicht-Faktorisierbarkeit verschränkter Zustände

Gegeben sei folgender verschränkter Zustand:

$$\left|y\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2 - \left|-\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2\right)$$

Nehmen wir nun an, dass folgendes gilt:

$$\left|y\right\rangle = \left|y\right\rangle_1\left|y\right\rangle_2 \quad mit \quad \left|y\right\rangle_1 = c_+\left|+\right\rangle_1 + c_-\left|-\right\rangle_1 \quad und \quad \left|y\right\rangle_2 = d_+\left|+\right\rangle_2 + d_-\left|-\right\rangle_2$$

Eingesetzt ergibt sich folgendes:

$$\left|y\right\rangle_1\left|y\right\rangle_2 = c_+d_+\left|+\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2 + c_+d_-\left|+\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2 + c_-d_+\left|-\right\rangle_1\left|+\right\rangle_2 + c_-d_-\left|-\right\rangle_1\left|-\right\rangle_2$$

Um die Gleichung erfüllen zu können, müsste folgendes gelten:

$$c_+d_+ = 0 \quad und \quad c_+d_- = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad und \quad c_-d_+ = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad und \quad c_-d_- = 0$$

Auflösen des obigen Gleichungssystems führt zu der Erkenntnis, dass es keine Lösung dafür gibt und somit der verschränkte Zustand nicht faktorisierbar ist.

Eigenschaften eines verschränkten Quantensystems:

Die Messung eines einzelnen Teilchens legt das Messergebnis für das andere Teilchen fest.

Beispiel:

Hat man zwei verschränkte Spin ½-Teilchen gegeben durch die Formel

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2\right)$$

und misst man an einem der Teilchen den Spin |->, so ist damit sofort der Spin |+> für das andere Teilchen festgelegt.

Für diesen Effekt ist es irrelevant, wie weit die Teilchen von einander entfernt sind.

Anmerkung:

Durch diesen Effekt ist allerdings keine superluminale Kommunikation möglich, da die Information, welcher Zustand am ersten Teilchen gemessen wurde, auf normalem Wege übermittelt werden muss.

Lokalität und „Hidden Variables“

Annahme: Die „geisterhafte“ Festlegung des Messergebnisses für das zweite Teilchen durch das weit entfernte erste Teilchen ist (darf) nicht möglich (sein).

Eine lokale Operation kann auch nur lokale Auswirkungen haben. Es muss also schon vor der Trennung der Teilchen festgelegt gewesen sein, welche Messergebnisse auftreten werden.

Diese Festlegung wird bestimmt durch so genannte „versteckte Variablen“, die wir einfach nicht kennen (und u. U. auch nicht kennen können).

Es lässt sich aber durch die so genannten Bell-Ungleichungen zeigen, dass eine Theorie mit versteckten Variablen die Quantenmechanik nicht vollständig erklären kann.

Beispiel einer Bell-Ungleichung: Die CHSH-Ungleichung

$$\frac{1}{2}\left|E(A_1,B_1)+E(A_1,B_2)+E(A_2,B_1)-E(A_2,B_2)\right|\leq 1$$

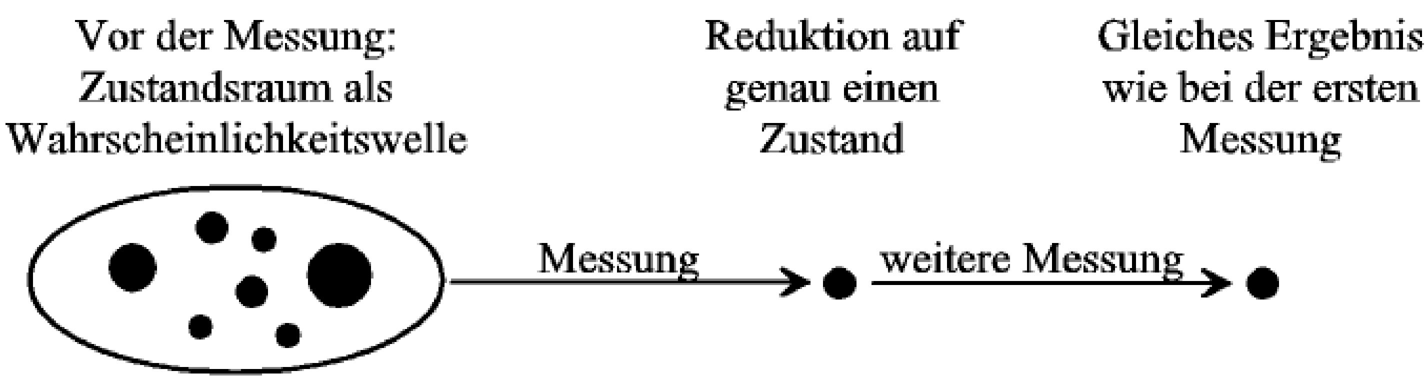
Messung

Kollaps der Wahrscheinlichkeitswelle

Die möglichen Zustände eines Systems in Superposition lassen sich als Wahrscheinlichkeitswelle beschreiben, die jedem möglichen Messergebnis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Bei der Messung kollabiert diese Wahrscheinlichkeitswelle auf genau einen Zustand, nämlich das Messergebnis. Jede weitere gleiche Messung liefert dann wieder genau diesen Zustand.

Anschaulich:



Mathematische Betrachtung

Die Messung wird beschrieben durch eine Menge von Messoperatoren $\{M_m\}$, wobei sich der Index *m* auf das mögliche Ergebnis bezieht.

Die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Ergebnis m zu erhalten, ergibt sich durch

$$p(m) = \langle y | M_m^t M_m | y \rangle$$

und der Zustand des Systems nach der Messung ist

$$\frac{M_m |y\rangle}{\sqrt{\langle y | M_m^t M_m | y \rangle}}$$

Anmerkung:

Die Messoperatoren M_i sind hermitsche Matrizen, so dass gilt, dass sich die oben errechneten Wahrscheinlichkeiten p(m) auf 1 summieren.

Komplementäre Eigenschaften

Die Messung konjugierter Eigenschaften eines Teilchens in verschiedenen Messungen können nicht zu einem Gesamtbild zusammengefügt werden.

Bohr definierte dafür den Begriff der „Komplementarität“.

Ort und Impuls z.B. sind zueinander komplementär und Experimente zur gleichzeitigen Messung der Eigenschaften schließen sich aus.

Eng damit verknüpft ist die Heisenbergsche Unschärferelation, die es erlaubt, die maximale Genauigkeit der Messung zweier konjugierter Eigenschaften zu berechnen.

Schrödingers Katze

Die Katze ist in einem verschlossenen Kasten mit einem Apparat, der zufällig (mit p=0,5) innerhalb einer Stunde ein tödliches Gift freisetzen kann.

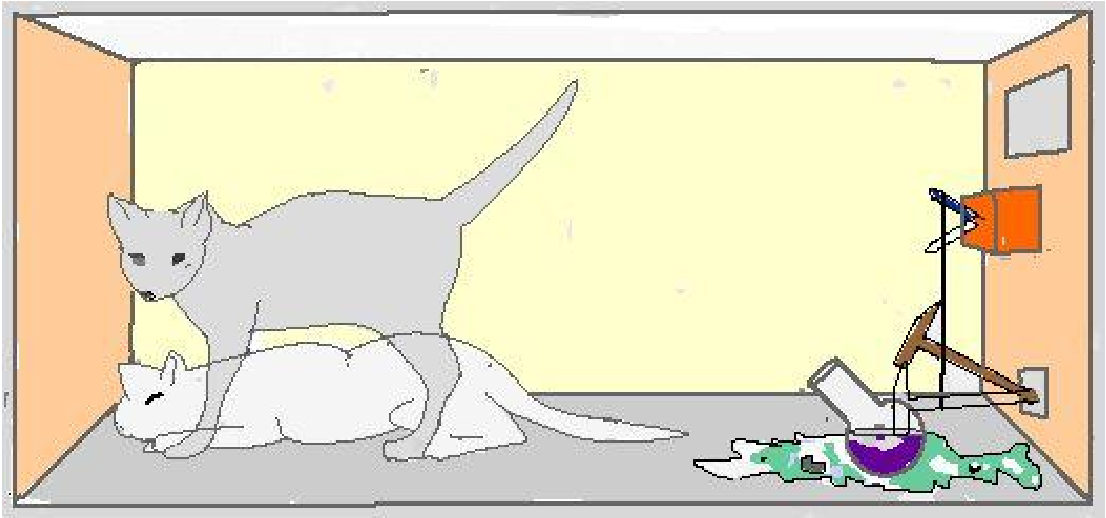


Bild: milq – Münchner Internetprojekt zur Lehrerfortbildung in Quantenmechanik

Nach entsprechender Wartezeit befindet sich die Katze in der Superposition von lebendig und tot. Öffnet man allerdings den Kasten, so findet man die Katze nicht in diesem überlagerten Zustand vor, sondern entweder tot oder lebendig.

Nicht vorhandene Eigenschaften

Ohne eine Messung an den Teilchen vorzunehmen, kann man ihnen nicht ohne weiteres eine bestimmte Eigenschaft zuweisen.

Photonen im Doppelspaltexperiment ohne Lichtquelle hatten die Eigenschaft Ort nicht. Erst mit Einbringen der Lichtquelle (=Messung) besaßen sie wieder die Eigenschaft Ort.

Schrödingers Katze besitzt in der Superposition die Eigenschaft „Lebendigkeit“ nicht. Es hat keinen Sinn zu sagen, die Katze wäre tot oder lebendig. Erst mit dem Öffnen des Kastens (=Messung) kann man darüber eines Aussage machen.

Dekohärenz

Jede Messung eines quantenmechanischen Systems ist ein Eingriff in das System und verändert es.

Jeder Eingriff in das System ist aber auch eine Art Messung und verändert das System.

Die Wechselwirkungen des (nicht vollständig isolierten) quantenmechanischen Systems mit der Umwelt werden Dekohärenz genannt.

Da sie einen Eingriff in das System darstellen, verändern sie das System.

Aus diesem Grund ist z. B. Schrödingers Katze nur ein Gedankenexperiment. In Wirklichkeit ist sie immer entweder tot oder lebendig, da die Wechselwirkungen der Katze mit der Umwelt den Überlagerungszustand sofort zerstören.

Abschluss

The Hilbert Space is a very nice and useful abstraction of physical reality. However, one should not forget that real quantum computing is not performed in a Hilbert space but in laboratories.

Michael Nielsen, nach Asher Peres

Gott würfelt nicht!

Albert Einstein

Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, hat sie nicht verstanden.

Niels Bohr

Da steh ich nun, ich armer Thor,
und bin so klug als wie zuvor.

Johann Wolfgang von Goethe