

---

## Algorithmische Algebra II

---

Abgabe: 5. Mai, in der Übung, MI03.09.011B

### Aufgabe 1

Sei  $M$  ein  $R$ -Modul und  $N, U, V$   $R$ -Untermoduln von  $M$ . Zeigen Sie:

- (a)  $(U + V)/V \cong U/(U \cap V)$ .
- (b)  $M$  noethersch  $\iff M/N$  und  $N$  noethersch. Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).

### Aufgabe 2

Sei  $R = k[X_1, \dots, X_n]$ . Zeigen Sie:

- (a) Sind  $h_1, \dots, h_s \in R$ , so ist  $\text{syz}(h_1, \dots, h_s)$  ein  $R$ -Untermodul von  $R^s$ .
- (b) Sei  $F = [f_1, \dots, f_s]$  mit  $f_i = c_i M_i \neq 0$ ,  $c_i \in k$ ,  $M_i \in \mathbb{M}(X_1, \dots, X_n)$ . Nach Satz 6.3.6 der Vorlesung ist jedes Element von  $S(F) := \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_s))$  eindeutig darstellbar als Summe von homogenen Syzygien, d.h.  $S(F) = \bigoplus_{\alpha} S(F)_{\alpha}$ . Beweisen Sie die Eindeutigkeit.

### Aufgabe 3

Seien  $f_1, \dots, f_q \in R \setminus 0$ ,  $R = k[X_1, \dots, X_n]$ , gegeben. Sei  $\Phi : R^q \rightarrow R^q$  die Abbildung definiert durch (vgl. Vorlesung)  $\Phi(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$  und, für  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_q) \neq (0, \dots, 0)$ , durch  $\Phi(\bar{h}) = (h'_1, \dots, h'_q)$  mit

$$h'_i = \begin{cases} \text{LT}(h_i), & \text{falls } \text{multideg}(h_i f_i) = \delta(\bar{h}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\delta(\bar{h}) = \max\{\text{multideg}(h_i f_i) : h_i f_i \neq 0\}$ . Ist  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_q) \in \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$  eine homogene Syzygie vom Grad  $\delta$  und  $\bar{h} = (h_1, \dots, h_q) \in R^q$  mit  $\sum_i s_i f_i = \sum_i h_i f_i$  und  $\delta(\bar{h}) < \delta$ , so gilt  $\Phi(\bar{s} - \bar{h}) = \Phi(\bar{s}) = \bar{s}$ .

### Aufgabe 4

Seien  $f_1, \dots, f_q \in R \setminus 0$ ,  $R = k[X_1, \dots, X_n]$ , gegeben und sei  $\mathcal{F} = [f_1, \dots, f_q]$ .

- (a) Sei  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_q) \in \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$  homogen vom Grad  $\delta$ . Ist dann  $\bar{s} \cdot \mathcal{F} := \sum_i s_i f_i \neq 0$ , so gilt  $\text{multideg}(\bar{s} \cdot \mathcal{F}) < \delta$ .
- (b) Sei  $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_t$  ein Erzeugendensystem von  $\text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$ , wobei  $\bar{s}_i$  homogen vom Grad  $\gamma_i$  ist. Ist dann  $\bar{s} \in \text{syz}(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_q))$  homogen vom Grad  $\delta$ , so existieren  $d_i \in k$  mit

$$\bar{s} = \sum_i d_i X^{\delta - \gamma_i} \bar{s}_i.$$

- (c) Beweisen Sie Theorem 6.3.11 der Vorlesung unter Benutzung von (a) und (b).