

---

## Diskrete Strukturen II

---

### Aufgabe 1 (Verteilung des Minimums)

Es seien  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungen  $F_X(t) := \Pr[X \leq t]$  und  $F_Y(t) := \Pr[Y \leq t]$ .

Berechnen Sie für  $Z := \min\{X, Y\}$  die Verteilung  $F_Z(t) := \Pr[Z \leq t]$  (in Abhängigkeit von  $F_X(t)$  und  $F_Y(t)$ ).

### Aufgabe 2 (Serverausfälle)

Ein Server fällt am  $i$ -ten Tag mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  aus.  $X$  sei die Anzahl der Tage bis zum ersten Ausfall.

- (a) Bestimmen Sie einen allgemeinen Ausdruck für  $\Pr[X = n]$  und  $\Pr[X > n]$ .
- (b) Betrachten Sie die Spezialfälle

(1)  $p_i = \frac{1}{i+1}$

(2)  $p_i = 1 - e^{-\lambda i}$ .

Berechnen Sie jeweils  $\Pr[X > n]$  und entscheiden Sie, ob  $\mathbb{E}[X]$  existiert<sup>1</sup>.

### Aufgabe 3 (Mensch gegen Maschine)

Gary Kasparov und Deep Blue spielen Schach, wobei Deep Blue eine Partie mit Wahrscheinlichkeit  $p$  gewinnt. Wie viele Partien spielen die beiden im Mittel, bis einer von Ihnen zwei Partien in Folge für sich entschieden hat?

### Aufgabe 4 (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung)

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt *gedächtnislos*, falls für alle  $x, y \in W_X$  gilt

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x].$$

Zeigen Sie, daß eine Zufallsvariable mit Wertebereich  $\mathbb{N}_0$  *genau dann* geometrisch verteilt ist, wenn sie gedächtnislos ist.

---

<sup>1</sup>d.h.  $\mathbb{E}[X] < \infty$

### Aufgabe 5 (Was trifft zu?)

Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit  $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$ ,  $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$  und  $Z := X \cdot Y$  gilt  $Z \sim \text{Bernoulli}(p_X \cdot p_Y)$ .
- (b) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit  $X \sim \text{Bernoulli}(p_X)$ ,  $Y \sim \text{Bernoulli}(p_Y)$  und  $Z := X + Y$  gilt  $Z \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{p_X + p_Y}{2}\right)$ .
- (c) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ,  $Y \sim \text{Bin}(m, p)$  und  $Z := X + Y$  gilt  $Z \sim \text{Bin}(n + m, p)$ .
- (d) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit  $X \sim \text{Bin}(n, p_X)$ ,  $Y \sim \text{Bin}(n, p_Y)$  und  $Z := X + Y$  gilt  $Z \sim \text{Bin}\left(2n, \frac{p_X + p_Y}{2}\right)$ .
- (e) Für unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ ,  $Y \sim \text{Po}(\mu)$  und  $Z := X + Y$  gilt  $Z \sim \text{Po}(\lambda + \mu)$ .