Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

WS 2003/04
Übungsblatt 11
23. Januar 2004

Diskrete Strukturen I

Abgabe bis Donnerstag, 29. Januar 2004, 12:15 Uhr (in Stellordner vor Raum 03.09.052)

Aufgabe 1

Gegeben Sei folgende lineare Rekursionsgleichung

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \qquad (n \geq 2) \tag{1}$$

mit variablen Anfangsbedingungen $a_0 = a$, $a_1 = b$.

(a) Bestimmen Sie für (1) die vollständige Rekursion .

(b) Zeigen Sie, dass

$$A(x) = \frac{a + (b - 4a)x}{1 - 4x + 4x^2}$$

die erzeugende Funktion von (1) ist.

(c) Zeigen Sie, dass (1) die Lösung

$$a_n = \left(\left(\frac{b}{2} - a \right) n + a \right) 2^n \qquad (n \geq 0)$$

in Abhängigkeit von a, b hat.

Aufgabe 2

Hinweis: In dieser Aufgabe benötigen Sie das Computerprogramm Maple, welches in der Sunhalle unter /usr/local/applic/bin/xmaple zur Verfügung steht.
Gegeben Sei die lineare Rekursion

$$a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0 \qquad (n \geq 3) \tag{2}$$

mit variablen Anfangsbedingungen $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = c$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Maple die erzeugende Funktion und die allgemeine Lösung von (2) in Abhängigkeit von a, b und c.

(b) Für genau welche Werte von a, b, c hat die Rekursion (2) eine konstante Lösung, d.h. $a_n = \gamma$ $(n \geq 0)$ für eine konstante γ. Genau wann hängt a_n linear/quadratisch von n ab?

Aufgabe 3

Sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben, $|V| = n + 1, |E| = m$. Jeder Spannbaum $T(G)$ enthält genau n der insgesamt m Kanten. Man erhält einen solchen Spannbaum etwa, indem man in einer beliebigen Reihenfolge alle Kanten des Graphen ausprobiert und jeweils solche Kanten behält, die zusammen mit den bereits zuvor behaltenen Kanten *keinen* Kreis schließen. Offenbar ist das Ergebnis abhängig von der Wahl der Reihenfolge. *Wieviele* verschiedene Spannbäume gibt es?

Hinweise: Für eine $m \times n$-Matrix A gilt die Binet-Cauchy Formel:

$$\det A^T A = \sum_{S \subset \{1,\ldots,m\}, |S|=n} \det A_S^T A_S.$$

Dabei sei A_S die $n \times n$-Matrix, die aus A entsteht, indem man alle Zeilen streicht, deren Nummern nicht in der Menge S liegen. (Wir identifizieren ggf. eine Kante mit ihrer Nummer in $\{1, \ldots, m\}$.)
Wir erzeugen nun die $m \times (n + 1)$-Matrix $\hat{A}$ aus der $m \times (n + 1)$-Inzidenzmatrix von G, indem dort in jeder Zeile jeweils einer der beiden Einträge mit dem Wert $+1$ durch -1 ersetzt wird. Die obige $m \times n$-Matrix A entsteht jetzt, indem man aus $\hat{A}$ die erste Spalte wegstreicht.
Nun erkennt man, daß in der obigen Formel der Summationsindex S alle n-elementigen Teilmengen der Kanten von G durchläuft, insbesondere also auch jene, die Spannbäume von G sind.
Erfreulicherweise sind von allen Summanden genau die Summanden gleich 1, die zu einem Summationsindex gehören, der einem Spannbaum korrespondiert, alle anderen Summanden sind Null. Also zählt die obige Formel genau die Anzahl der Spannbäume von G.

Beweisen Sie, daß tatsächlich $\det A_S^T A_S$ genau dann gleich 1 ist, wenn S einem Spannbaum korrespondiert, und anderenfalls gleich Null ist.

Aufgabe 4

Geben Sie mit Hilfe der in der vorigen Aufgabe neu gewonnenen Formel einen alternativen Beweis für den Satz von Cayley, indem Sie die Spannbäume des vollständigen Graphen K_n zählen.

Theorem 1 (Cayley) *Für $n \geq 2$ ist die Anzahl der Bäume auf n Knoten gleich n^{n-2}.*