Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

07.05.2004

Aufgabe 1

Eine Urne enthält N Bälle - rote und blaue.
5 Bälle werden ohne Zurücklegen aus der Urne entnommen.
Wahrscheinlichkeit, dass alle entnommenen Bälle blau sind,
soll genau $1/2$ sein.
Wie groß ist N mindestens?

Aufgabe 1

r rote Bälle, b blaue Bälle $(r, b > 0)$

$$r + b = N$$

Pr[Alle 5 Bälle blau]

$$\begin{aligned} &= Pr[1.\text{ Zug blau}] \cdot Pr[2.\text{ Zug blau}] \cdot Pr[3.\text{ Zug blau}] \cdot \\ &\quad Pr[4.\text{ Zug blau}] \cdot Pr[5.\text{ Zug blau}] \\ &= \frac{b}{r+b} \cdot \frac{b-1}{r+b-1} \cdot \frac{b-2}{r+b-2} \cdot \frac{b-3}{r+b-3} \cdot \frac{b-4}{r+b-4} \quad (*) \end{aligned}$$

Aufgabe 1

Sei N_{opt} die minimal mögliche Gesamtzahl von Bällen, so dass $Pr[\text{Alle 5 Bälle blau}] = \frac{1}{2}$.
Wir betrachten eine optimale Lösung mit r_{opt} roten und b_{opt} blauen Bällen.

Wir beweisen nun: Es gibt keine Lösung zum Problem, die weniger rote Bälle beinhaltet als diese optimale $(**)$.

Nehmen wir an, es gäbe eine optimale Lösung mit $r'_{\text{opt}} < r_{\text{opt}}$ roten Bällen und b'_{opt} blauen Bällen.
Damit aber dann nicht $Pr[\text{Alle 5 Bälle blau}] > \frac{1}{2}$, muss nach $(*)$ auch $b'_{\text{opt}} < b_{\text{opt}}$ sein.
$\Rightarrow N'_{\text{opt}} = r'_{\text{opt}} + b'_{\text{opt}} < N_{\text{opt}}$
$\Rightarrow$ Widerspruch, weil N_{opt} minimal sein sollte.

Aufgabe 1

Wir formen nun $(*)$ um zu

$$
\begin{aligned}
r+b \\
&= \frac{b}{Pr[\text{alle 5 blau}]} \cdot \frac{b-1}{r+b-1} \cdot \frac{b-2}{r+b-2} \cdot \frac{b-3}{r+b-3} \cdot \frac{b-4}{r+b-4} \\
&= 2 \cdot b \cdot \frac{b-1}{r+b-1} \cdot \frac{b-2}{r+b-2} \cdot \frac{b-3}{r+b-3} \cdot \frac{b-4}{r+b-4} \\
&= 2 \cdot \frac{b}{\color{red}{r}+b-1} \cdot \frac{b-1}{\color{red}{r}+b-2} \cdot \frac{b-2}{\color{red}{r}+b-3} \cdot \frac{b-3}{\color{red}{r}+b-4} \cdot (b-4)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1

Durch die Umformung sehen wir, dass bereits $r = 1$ eine ganzzahlige Lösung für b (und damit auch für N) ergibt, nämlich

$$r + b \quad = \quad 2 \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{b-1}{b-1} \cdot \frac{b-2}{b-2} \cdot \frac{b-3}{b-3} \cdot (b-4)$$

woraus unmittelbar

$$r + b = 2b - 8 \quad \Rightarrow \quad b = 9$$

folgt. Also ist $N = 10$ eine Lösung für unser Problem.

Die Optimalität von N folgt aus $(**)$, da es sonst eine Lösung für das Problem mit weniger als 1 (also gar keinen) roten Bällen geben müsste, was aber nicht sein kann.

Aufgabe 2

Die folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeit $Pr[k]$ an, dass eine Familie k Kinder hat:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Pr[k]$	0.3	0.2	0.2	0.13	0.09	0.04	0.025	0.01	0.004	0.001

(Wir vernachlässigen die Wahrscheinlichkeit höherer Kinderzahlen.)

Wenn Jungen- und Mädchengeburten gleich wahrscheinlich sind, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Junge mindestens eine Schwester hat?

Aufgabe 2

Im Mittel hat eine Familie

$$m = \sum_k k \cdot Pr[k] = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + \cdots + 9 \cdot 0.001 = 1.811$$

Kinder.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Junge aus einer Familie mit k Kindern stammt, ist

$$\frac{k \cdot Pr[k]}{m}$$

.

Aufgabe 2

Wenn ein Junge einer Familie mit $i \geq 1$ Kindern angehört, gilt
Pr[Junge hat Schwester | i Kinder]

$$\begin{aligned} &= 1 - Pr[\text{Alle Geschwister Jungen} \mid i \text{ Kinder}] \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} . \end{aligned}$$

Wir wissen daher
Pr[Junge hat Schwester]

$$\begin{aligned} &= \sum_i Pr[\text{Junge hat Schwester} \mid i \text{ Kinder}] \cdot Pr[i \text{ Kinder}] \\ &= \frac{Pr[1]}{m} \cdot 0 + \frac{2 \cdot Pr[2]}{m} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot Pr[3]}{m} \cdot \frac{3}{4} + \cdots + \frac{9 \cdot Pr[9]}{m} \cdot \frac{255}{256} \\ &\approx 69.0\% \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Für alle $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \in \Omega = \{0,1\}^n$ mit $n \geq 2$ sei

$$Pr[\omega] = 2^{-n}.$$

Gegeben die Ereignisse

$$A_i := \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = 1\}$$

$$B := \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{n} \omega_i \text{ ist ungerade}\}$$

sowie die Familien

$$F_1 = \{A_1, \ldots, A_n, B\} \qquad F_2 = \{A_1, \ldots, A_n\} \qquad F_3 = \{A_2, \ldots, A_n, B\},$$

welche dieser Familien sind unabhängig?

Aufgabe 3

Familie F_1 ist *abhängig*, denn es gilt

$$Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap B] = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2^{-n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

aber

$$Pr[A_1] \cdot \cdots \cdot Pr[A_n] \cdot Pr[B] = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Familie F_2 ist *unabhängig*, denn für beliebiges $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = 2^{-|I|} = \prod_{i \in I} \frac{1}{2} = \prod_{i \in I} Pr[A_i]$$

Aufgabe 3

Familie F_3 ist *unabhängig*.
Um dies zu zeigen, müssen wir nur diejenigen Teilmengen $I \subseteq F_3$ betrachten, die B enthalten
(für alle anderen Teilmengen gilt die Rechnung analog zu F_2).
Dann aber ist

$$Pr[B \cap \left(\bigcap_{A \in I \setminus \{B\}} A \right)] = Pr[B] \cdot Pr[\left(\bigcap_{A \in I \setminus \{B\}} A \right)] = Pr[B] \cdot \prod_{A \in I \setminus \{B\}} Pr[A]$$

Das Ausklammern von $Pr[B]$ im ersten Schritt ist damit zu rechtfertigen, dass die Hälfte aller Teilmengen aus $\Omega = \{0,1\}^n$, für die nicht alle ω_i festgelegt sind, eine ungerade Anzahl von 1en aufweist. Im vorliegenden Fall ist unabhängig von I zumindest ω_1 nie festgelegt.

Aufgabe 4

Ein Würfel sei mit den Zahlen $\{0, \ldots, 5\}$ beschriftet. Wir würden mit ihm gerne Zufallszahlen erzeugen, leider ist er jedoch schon so abgenutzt, dass die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zahlen nicht mehr gleichverteilt sind.
Genauer ist für $k \in \{0, \ldots, 5\}$ die Wahrscheinlichkeit $Pr[k] = 1/6 + \varepsilon_k$ mit $|\varepsilon_k| < 1/12$.
Wir wollen aber partout nicht aufgeben und den Würfel zum Erzeugen von Zufallszahlen verwenden! Daher würfeln wir mehrmals und hoffen, dass hierdurch die Fehler des Würfels ausgeglichen werden.

Zeigen Sie, dass man die maximale Abweichung von der Gleichverteilung mindestens halbiert, wenn man *ein* Wurfergebnis dadurch ermittelt, dass man zweimal würfelt und die Augensumme modulo sechs als Ergebnis angibt.

Aufgabe 4

Um eine Zahl $i \in \{0 \ldots 5\}$ zu würfeln gibt es 6 Möglichkeiten:

i und 0 $\quad (i - 1 \bmod 6)$ und 1 $\quad \ldots \quad (i - 5 \bmod 6)$ und 5

Damit ist

$$\begin{aligned} Pr[i] &= \sum_k Pr[(i - k \bmod 6) \text{ und } k \text{ gewürfelt}] \\ &= \sum_k Pr[i - k \bmod 6] \cdot Pr[k] \\ &= \sum_k (\frac{1}{6} + \varepsilon_{i-k \bmod 6})(\frac{1}{6} + \varepsilon_k) \\ &= \sum_k \frac{1}{36} + \underbrace{\sum_k \frac{1}{6}\varepsilon_{i-k \bmod 6}}_{=0} + \underbrace{\sum_k \frac{1}{6}\varepsilon_k}_{=0} + \sum_k \varepsilon_{i-k \bmod 6} \cdot \varepsilon_k \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$
\begin{aligned}
|Pr[i] - 1/6| &= |\sum_k \frac{1}{36} + \sum_k \varepsilon_{i-k \bmod 6} \cdot \varepsilon_k - 1/6| \\
&= |\sum_k \varepsilon_{i-k \bmod 6} \cdot \varepsilon_k| \leq \sum_k \varepsilon_{\max}^2 \\
&= 6 \cdot \varepsilon_{\max}^2 \\
&< 6 \cdot \frac{1}{12} \varepsilon_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{2}
\end{aligned}
$$

Also ist die neue Abweichung $\varepsilon'_{\max} \leq \varepsilon_{\max}/2$.