Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

25.06.2004

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801

Aufgabe 1

Seien $\{X_1, \ldots, X_n\}$ unabhängige mit Parameter 1 exponentialverteilte Zufallsvariablen.

Zeigen Sie, dass

$$\Pr\left[\max_{1 \le i \le n} X_i \le \log n + x\right] = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

Was passiert für $n \to \infty$?

Hinweis: Überlegen Sie sich: Was muss für *jedes* X_i gelten, damit die geforderte Bedingung für das Maximum erfüllt ist?

Aufgabe 1

Damit das Maximum die geforderte Bedingung erfüllt, muss jedes X_i diese Bedingung erfüllen. Wir haben also

$$\Pr\left[\max_{1\le i\le n} X_i \le \log n + x\right] = \Pr\left[\bigwedge_i (X_i \le \log n + x)\right]$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen folgt

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bigwedge_i (X_i \le \log n + x)\right] &= \prod_{1\le i\le n} \Pr[X_i \le \log n + x] \\ &= (\Pr[X_i \le \log n + x])^n \\ &= (1 - e^{-\log n - x})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n\end{aligned}$$

Aufgabe 1

Für $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\max_{1\le i\le n} X_i \le \log n + x\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{(-e^{-x})}$$

Das heisst: Bereits für kleine x liegt die Wahrscheinlichkeit, dass alle $X_i \le \log n + x$ sind, sehr nahe bei 1.

Aufgabe 2

Seien X und Y unabhängige kontinuierliche positivwertige Zufallsvariablen.

Drücken Sie die Dichtefunktion $f_Z = f_{X/Y}$ von X/Y durch die Dichtefunktionen f_X und f_Y von X und Y aus.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Verteilungsfunktion von Z durch Bildung eines Integrals über $\{(x, y) \mid y \geq x/z\}$.

Aufgabe 2

Die Verteilungsfunktion von Z ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \Pr[Z \leq z] = \Pr[X/Y \leq z] \\
&= \Pr[(X,Y) \in \{(x,y) \mid y \geq x/z\}] \\
&= \int\int_{\{(x,y) \mid y \geq x/z\}} f_X(x) \cdot f_Y(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_{x/z}^\infty f_X(x) \cdot f_Y(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty f_X(x) \cdot \int_{x/z}^\infty f_Y(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty f_X(x) \cdot (1 - F_Y(x/z)) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Damit errechnet sich die Dichte zu

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_0^\infty f_X(x) \cdot (1 - F_Y(x/z))\, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{z^2} f_X(x) \cdot f_Y(x/z)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Ein Krankenhaus steht in einer Strasse der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

a) Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?

Aufgabe 3

a) Wir minimieren für ein auf $[0,\ell]$ gleichverteiltes X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X-a|] &= \int_a^\ell (x-a)\cdot\frac{1}{\ell-0}\,\mathrm{d}x + \int_0^a (a-x)\cdot\frac{1}{\ell-0}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ell^2+a^2-2a\ell}{2\ell}+\frac{a^2}{2\ell} = \frac{\ell^2+2a^2-2a\ell}{2\ell}\end{aligned}$$

Wir differenzieren diese Funktion nach a, um das Minimum zu finden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{\ell^2+2a^2-2a\ell}{2\ell} = \frac{-2\ell+4a}{2\ell} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{\ell}{2}$$

Das Krankenhaus sollte also genau in der Mitte der Straße stehen.

Aufgabe 3

b) Sei nun $\ell = \infty$ und die Notfälle vom Punkt 0 an exponentialverteilt mit Parameter λ.
Wo sollte das Krankenhaus jetzt idealerweise stehen?

Aufgabe 3

b) Wir minimieren für ein mit Parameter λ exponentialverteiltes X

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X-a|] &= \int_a^{\ell} (x-a)\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \int_0^a (a-x)\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{-a\lambda}}{\lambda} + \frac{e^{-a\lambda}+a\lambda-1}{\lambda} = \frac{2e^{-a\lambda}+a\lambda-1}{\lambda}\end{aligned}$$

Wir differenzieren diese Funktion nach a, um das Minimum zu finden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{2e^{-a\lambda}+a\lambda-1}{\lambda} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Aufgabe 4

Seien A, B und C unabhängig und jeweils gleichverteilt über $[0,1]$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Lösungen der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ reellwertig sind?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $A \cdot C$ und verwenden Sie für die sich anschließende Rechnung $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.

Aufgabe 4

Zunächst bringen wir die Gleichung in die Normalform $x^2 + px + q = 0$:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung lauten

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ &= -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{C}{A}} \end{aligned}$$

Die Gleichung besitzt genau 2 reelle Lösungen, wenn der Term unter der Wurzel größer als Null ist (und genau eine bei Gleichheit). Alle Lösungen sind also genau dann reell, wenn $B^2 \geq 4AC$.

Aufgabe 4

Die Dichte von AC ist gegeben über die Verteilung

$$F_{AC}(x) = \Pr[AC \leq x] = \int_0^x \int_0^1 dc\, da + \int_x^1 \int_0^{x/a} dc\, da = x - x \ln x$$

aus welcher direkt

$$f_{AC} = -\ln x$$

folgt. Damit ist

$$\begin{aligned} \Pr[B^2/4 \geq AC] &= -\int_0^1 \int_0^{B^2/4} \ln x\, dx\, db \\ &= \int_0^1 \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \ln \frac{b^2}{4}\, db = \frac{\ln 2}{6} + \frac{5}{36} \approx 25.4\% \end{aligned}$$

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801