Diskrete Strukturen II

Zentralübung

Hanjo Täubig Sebastian Wernicke

02.07.2004

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801

Aufgabe 1

Angenommen, zwei Zufallsvariablen haben die gemeinsame Dichtefunktion $f(x, y) = \frac{e^{-y}}{y}$ für $0 < x < y$ und $0 < y < \infty$, sonst 0.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^3 \mid Y = y]$.

Aufgabe 1

Um den Erwartungswert zu berechnen, müssen wir zunächst die Dichte von $X \mid Y = y$ berechnen, wofür wir die Randverteilung von Y benötigen:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x = \int_0^y \frac{e^{-y}}{y} \, \mathrm{d}x = e^{-y}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$f_{X \mid Y}(x \mid y) = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y$$

so dass X unter der Bedingung $Y = y$ gleichverteilt auf $[0, y]$ ist. Mithin folgt

$$\mathbb{E}[X^3 \mid Y = y] = \int_0^y \frac{x^3}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{y^3}{4}$$

Aufgabe 2

Versicherungen benutzten manchmal die Funktion

$$h(t) = 0.027 + 0.0025(t - 40)^2$$

um die 'Ausfallrate' durch Lungenkrebs eines t Jahre alten männlichen Kettenrauchers abzuschätzen.

Angenommen, ein 40 Jahre alter Raucher hat keine anderen Risiken.
Wie groß ist nach der Formel die Wahrscheinlichkeit, dass er bis zu seinem 50-ten Lebensjahr nicht erkrankt?

Aufgabe 2

Wir haben für $t > s$

$$\Pr[X > t \mid X > s] = \exp\left(-\int_s^t h(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Daher gilt, wenn X die Lebensdauer eines Rauchers ist,

$$\Pr[X > 50 \mid X > 40] = \exp\left(-\int_{40}^{50} 0.027 + 0.0025(t-40)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

woraus wegen

$$\int_{40}^{50} 0.027 + 0.0025(t-40)^2\,\mathrm{d}t = 0.27 + 2.5/3$$

folgt, dass

$$\Pr[X > 50 \mid X > 40] = e^{-(0.27+2.5/3)} \approx 33.2\%$$

Aufgabe 3

Manche Leute glauben, die tägliche Preisänderung am Aktienmarkt sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2.

Genauer ist der Preis Y_n einer Aktie am n-ten Tag durch

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n \quad (n \geq 1)$$

gegeben, wobei $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 sind.

Angenommen, heute kostet eine Aktie 100 EUR und $\sigma^2 = 1$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie in 30 Tagen mehr als 112 EUR wert ist?

(Hinweis: Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz)

Aufgabe 3

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist

$$\sqrt{30}\left(\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{30}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{\sqrt{30}}$$

annähernd standardnormalverteilt.

Damit ist

$$\begin{aligned}
\Pr[Y_{30} > 112 \mid Y_0 = 100] &= \Pr\left[\sum_{i=1}^{30} X_i > 12\right] \\
&= \Pr\left[\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{\sqrt{30}} > \frac{12}{\sqrt{30}}\right] \\
&\approx 1 - \Phi(2.19) \approx 1.4\%
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Betrachten wir ein anderes Modell für den Aktienmarkt als in Aufgabe 3:
Wenn eine Aktie zu einem bestimmten Zeitpunkt s EUR wert ist, dann ist ihr Wert nach einem Tag entweder $u \cdot s$ mit Wahrscheinlichkeit p oder $d \cdot s$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.
Die Preisentwicklungen an verschiedenen Tagen sind unabhängig voneinander.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Preis der Aktie in 1000 Tagen um 30% steigt, wenn $u = 101.2\%$, $d = 99.0\%$ und $p = 51\%$?

Hinweis: Wir haben vor einigen Wochen schon mal ein Produkt in eine Summe umgewandelt – hier geht es genauso.

Aufgabe 4

Sei X_n eine Zufallsvariable mit $X_n = 1$, wenn der Aktienpreis am n-ten Tag steigt und 0 sonst.
Die einzelnen X_i sind dann unabhängig mit

$$\Pr[X_i = 1] = p$$

und der Preis s_n der Aktie am n-ten Tag ist

$$s_n = s_o \cdot u^{\sum X_i} \cdot v^{n - \sum X_i} = s_0 \cdot d^n \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum X_i}$$

Aufgabe 4

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "Aktienpreis steigt um 30% in 1000 Tagen" berechnen, also

$$\Pr\left[\frac{s_{1000}}{s_0} \geq 1.3\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr\left[d^{1000}\frac{u}{d}^{\sum X_i} \geq 1.3\right] \\
&= \Pr\left[1000 \log d + \log\left(\frac{u}{d}\right) \cdot \sum_{i=1}^{1000} X_i \geq \log 1.3\right] \\
&= \Pr\left[\sum_{i=1}^{1000} X_i \geq \frac{-1000 \log d + \log 1.3}{\log\left(\frac{u}{d}\right)}\right] \\
&= \Pr\left[\frac{\sum_{i=1}^{1000}(X_i - p)}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{p(1-p)}} \geq \frac{-1000 \log d - 1000p \log\left(\frac{u}{d}\right) + \log 1.3}{\log\left(\frac{u}{d}\right) \cdot \sqrt{1000} \cdot \sqrt{p(1-p)}}\right]
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Da $\sum_{i=1}^{1000} X_i$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p binomialverteilt ist, können wir den zentralen Grenzwertsatz anwenden und erhalten

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[\frac{s_{1000}}{s_0} \geq 1.3\right] &\approx 1 - \Phi\left(\frac{-1000\log d - 1000p\log(\frac{u}{d}) + \log 1.3}{\log(\frac{u}{d}) \cdot \sqrt{1000} \cdot \sqrt{p(1-p)}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(-2.58) \approx 0.995
\end{aligned}
$$

Raumänderung

Die Zentralübung findet an folgenden Tagen nicht im gewohnten Hörsaal statt, sondern wie folgt:

- Freitag, 09.07.2004: MI Hörsaal 3
- Freitag, 16.07.2004: MW 1801