Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Peter Ullrich
Dmytro Chibisov

SS 2005
Übungsblatt 4
4. Mai 2005

Algorithmische Algebra I

Abgabe: 11. Mai, in der Vorlesung, MI 00.04.011

Aufgabe 1

Sei R ein Ring (stets kommutativ mit 1) und sei I ein Ideal von R. Weiterhin sei $\phi : R \to R/I$, $a \mapsto \overline{a}$ $(= a + I)$ der kanonische Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Ideal $\mathfrak{I}$ von R/I das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{I}) = \{a \in R : \phi(a) \in \mathfrak{I}\}$ ein Ideal von R ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathfrak{I} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{I})$ (aus (a)) eine Bijektion von der Menge aller Ideale $\mathfrak{I}$ von R/I auf die Menge aller Ideale J von R mit $J \supseteq I$ ist.

(c) Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal von R/I, so ist $\phi^{-1}(\mathfrak{P})$ ein Primideal von R (Ein Ideal $\mathfrak{P}$ heißt Primideal, wenn $\mathfrak{P} \neq (1)$ und $ab \in \mathfrak{P} \Rightarrow a \in \mathfrak{P}$ oder $b \in \mathfrak{P}$ gilt).

(d) Wie viele Ideale besitzt der Ring $\mathbb{Z}/(n)$?

Aufgabe 2

Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

(a) Ist I ein Ideal von R, so ist auch das Radikal $\mathrm{Rad}(I) = \sqrt{I} = \{a \in R : a^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ ein Ideal von R.

(b) Für welche Ideale I von $\mathbb{Z}$ gilt $I = \mathrm{Rad}(I)$?

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass es auf der Menge aller Monome des Polynomringes $k[X]$ (X steht für eine Variable, K ein Körper) genau eine Monomialordnung gibt.

Aufgabe 4

Sei $\leq$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{M}_n(x_1, ..., x_n)$, so dass für alle $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{M}_n$ gilt:

$$M_1 \leq M_2 \Rightarrow M_1 M_3 \leq M_2 M_3$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) $\leq$ ist eine Wohlordnung.

(2) $x_i > 1$ $(i = 1, ..., n)$.

(3) $M \geq 1$ $\forall M \in \mathbb{M}_n$, d.h. $\leq$ ist eine monomiale Ordnung.

(4) $\forall M, M' \in \mathbb{M}_n$ gilt: $M | M' \Rightarrow M \leq M'$.