

---

## Algorithmische Algebra I

---

(Abgabe: Mittwoch, 22.6.05, in der Vorlesung)

### Aufgabe 1

Bestimmen Sie für

$$\begin{aligned}f_1 &= x^4y^2 - 2x^2y^4 + y^6 - x^4 - 3y^4 + 2x^2 + 3y^2 - 1 \\f_2 &= 4x^3y^2 - 4xy^4 - 4x^3 + 4x \\f_3 &= 2x^4y - 8x^2y^3 + 6y^5 - 12y^3 + 6y\end{aligned}$$

die Anzahl der Punkte von  $V(f_1, f_2, f_3) \subseteq \mathbb{C}^2$ .

### Aufgabe 2

Sei  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  ( $k$  ein Körper) und  $K = \text{Quot}(R)$  der Quotientenkörper von  $R$ .

- (i) Ist  $f \in R[y]$  irreduzibel, so ist  $f$  auch irreduzibel in  $K[y]$ .
- (ii) Haben  $f, g \in R[y]$  keinen gemeinsamen, nicht-konstanten Faktor in  $R[y]$ , so auch nicht in  $K[y]$ .

### Aufgabe 3

Sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper.

- (i) Ist  $f \in k[x, y]$  ein nicht-konstantes Polynom, so ist  $V(f)$  unendlich.
- (ii) Seien  $f, g \in k[x, y]$  Polynome, die keinen nicht-konstanten gemeinsamen Faktor in  $k[x, y]$  haben. Dann gibt es Polynome  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in k[x, y]$  und  $h_1 \in k[x] \setminus 0, h_2 \in k[y] \setminus 0$  mit  $A_i f + B_i g = h_i$  ( $i = 1, 2$ ).
- (iii)  $V(f, g)$  ist genau dann unendlich, wenn  $f$  und  $g$  einen gemeinsamen, nicht-konstanten Faktor in  $k[x, y]$  besitzen.

### Aufgabe 4

In  $\mathbb{Q}[x, y]$  sind die Polynome

$$\begin{aligned}f &= x^2y - 3xy^2 + x^2 - 3xy \\g &= x^3y - 4y^2 + x^3 - 3y + 1\end{aligned}$$

gegeben. Berechnen sie die Resultante von  $f$  und  $g$  bzgl.  $x$  und  $y$  und versuchen Sie daraus, möglichst genaue Aussagen über die gemeinsamen Nullstellen von  $f$  und  $g$  zu gewinnen (Anzahl der Lösungen, liegen alle Lösungen in  $\mathbb{Q}$ ?, usw). Was können Sie aus den Ergebnissen ablesen?