
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 4.11.2005 vor der Vorlesung

Aufgabe 1

1. Es sei die Menge (das Alphabet) $\Sigma = \{a, b, c\}$ mit Zeichen a , b und c gegeben, und es sei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ . Untersuchen Sie die Teilwortrelation $\sqsubseteq \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq := \{(x, y) ; \exists y_1, y_2 \in \Sigma^* : y = y_1xy_2\}.$$

Dabei bedeutet y_1xy_2 das Wort, das durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter y_1 , x und y_2 entsteht. Es gilt beispielsweise $ba \sqsubseteq ccabab$, aber $cb \not\sqsubseteq ccabab$.

- (a) Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf \sqsubseteq zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten.
- (b) Sei $H := \{x \in \Sigma^* ; x \sqsubseteq abac\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq \cap (H \times H)$.
2. Konstruieren Sie in möglichst einfacher Weise Relationen R_1 , R_2 und R_3 , die die folgenden Eigenschaften besitzen.
- (a) R_1 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.
- (b) R_2 ist asymmetrisch und nicht transitiv.
- (c) Die transitive Hülle von R_2 ist symmetrisch.
- (d) R_3 ist die transitive Hülle von R_1 .

Aufgabe 2

1. Seien M und N beliebige endliche Mengen. Die Anzahl der Elemente in M bzw. N sei m bzw. n , d. h. $m = |M|$ und $n = |N|$. Zeigen Sie, dass die Anzahl aller injektiven Abbildungen von M nach N gegeben ist durch

$$n^m = \prod_{i=1}^m (n - i + 1).$$

Beachten Sie, dass für $m = 0$ das "leere" Produkt mit dem Wert 1 definiert ist.

2. Zeigen Sie, dass die Kardinalität von \mathbb{N}_0 gleich der von \mathbb{N} ist.
3. Zeigen Sie, dass es nicht mehr rationale Zahlen gibt als es natürliche Zahlen gibt, dass also eine injektive Abbildung der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} in die Menge \mathbb{N}_0 der natürlichen Zahlen existiert.

Aufgabe 3

1. Wir setzen die Eigenschaften der Exponentialfunktion e^x als bekannt voraus, also z. B. $0 < e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $e^0 = 1 < e^z$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^+$, sowie die Stetigkeit dieser Funktion. Sei $a > 0$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = a \cdot e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ein Isomorphismus von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^+ ist bezüglich der Addition von reellen Zahlen und der Multiplikation von positiven reellen Zahlen.
2. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über den ganzen Zahlen sei gegeben durch

$$(x, y) \in R \iff y = x + 1.$$

Berechnen Sie $R^2 = R \circ R$!

3. Zeigen Sie, dass für beliebige binäre Relationen $R, S, T \subseteq A \times A$ über einer beliebigen Menge A das folgende Distributivgesetz gilt.

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T).$$

Aufgabe 4

1. Ein Tourist auf einer Insel kommt zur einer Weggabelung. Der Tourist weiss nicht, welcher der beiden Zweige zu einem Restaurant führt, zu dem er gelangen möchte. Er weiss aber, dass die Insulaner entweder stets lügen oder stets die Wahrheit sagen. Glücklicherweise steht an der Gabelung ein Insulaner, der den Weg zum Restaurant kennt.

Welche Frage muss der Tourist an den Insulaner stellen, um aus dessen Antwort den richtigen Weg zu erfahren?

2. Funktionen, deren Argumente und Funktionswerte der Menge der Wahrheitswerte $\{T, F\}$ angehören, nennt man Boolsche Funktionen. Wir betrachten die 2-stelligen Boolschen Funktionen \equiv ("Äquivalenz") und \wedge ("und").

- (a) Zeigen Sie die Assoziativität der Funktion \equiv , d. h. für alle x, y, z

$$(x \equiv y) \equiv z = x \equiv (y \equiv z).$$

Berechnen Sie für alle x, y, z den Ausdruck

$$((x \equiv y) \equiv z) \equiv (x \equiv (y \equiv z)).$$

- (b) Das Assoziativgesetz für \equiv legt eine assoziative Interpretation eines Ausdrucks $x \equiv y \equiv z$ durch $x \equiv y \equiv z := (x \equiv y) \equiv z$ nahe. Zeigen Sie, dass die *konjunktionale* Interpretation des Ausdrucks $x \equiv y \equiv z := (x \equiv y) \wedge (y \equiv z)$ nicht zu seiner assoziativen Interpretation äquivalent ist, d. h., dass x, y und z existieren, so dass

$$(x \equiv y) \equiv z \neq (x \equiv y) \wedge (y \equiv z).$$