Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2005
Übungsblatt 5
18. November 2005

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 25. November 2005 **vor** *der Vorlesung*

Aufgabe 1

Wir betrachten Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ mit einer 4-elementigen Trägermenge S und einer Operation $\circ$, die die (2-seitige) Kürzungsregel erfüllt für alle $x, x', y \in S$

$$x \circ y = x' \circ y \;\Rightarrow\; x = x' \quad \wedge \quad y \circ x = y \circ x' \;\Rightarrow\; x = x' .$$

Wir fordern außerdem, dass alle "Quadrate" von Elementen aus A (d. h. aus S) rechtsneutral (rechtes Einselement) sind, d. h., dass für alle $x, y \in S$ gilt

$$y \circ (x \circ x) = y \,.$$

Wir werden zeigen, dass es bis auf Isomorphie nur zwei verschiedene Algebren gibt, die die obigen Forderungen erfüllen. Davon ist die eine Algebra eine kommutative Gruppe, die wir durch $\langle \mathbb{Z}_2, +_2 \rangle \times \langle \mathbb{Z}_2, +_2 \rangle$ darstellen werden. Die zweite Algebra ist eine nicht assoziative und nicht kommutative Algebra mit einem rechten Einselement 1_r, das kein linkes Einselement ist. Für die zweite Algebra werden wir eine Verknüpfungstafel angeben.

1. Zeigen Sie die Existenz eines eindeutigen rechten Einselements in A, i. Z. $1_r \in A$.
2. Wir nehmen an, dass 1_r auch linkes Einselement ist, und können in diesem Fall 1 schreiben für 1_r. Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!

   Machen Sie sich zunächst klar, was die (2-seitige) Kürzungsregel für die Elemente der Spalten bzw. Zeilen der Verknüpfungstafel bedeutet.
3. Wir nehmen wieder an, dass es in A ein (beidseitiges) Einselement gibt.
   (a) Zeigen Sie: A ist isomorph zu $\mathbb{Z}_{2\times 2} = \langle \mathbb{Z}_2, +_2 \rangle \times \langle \mathbb{Z}_2, +_2 \rangle$.
   (b) Zeigen Sie: A ist eine Gruppe.
   (c) Zeigen Sie: A ist nicht isomorph zur Gruppe $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$.

   Hinweis: Die Trägermenge von $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ ist $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, die Operation von $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ ist gegeben durch komponentenweise Addition modulo 2.
4. Wir nehmen nun an, dass 1_r nicht auch linkes Einselement ist.
   (a) Geben Sie für diesen Fall eine Verknüpfungstafel für $\circ$ an!
   (b) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Verküpfungstafel bis auf Isomorphie!
   (c) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\circ$ nicht assoziativ und die Algebra A damit keine Halbgruppe ist!

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

1. Jede zyklische Gruppe ist kommutativ.
2. In jeder zyklischen additiven Gruppe mit ungerader Ordnung ist die Summe aller Elemente gleich ihrem neutralen Element 0.
3. Es gibt keine zyklische additive Gruppe mit gerader Ordnung, in der die Summe aller Elemente gleich dem neutralen Element 0 ist.
4. Es gibt keine Gruppe der Ordnung 13, die eine echte Untergruppe enthält. Ist jede Gruppe der Ordnung 13 kommutativ? Begründung!

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass nachfolgende Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ mit binärem Operator $\circ$ Gruppen sind.

1. Sei $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und für alle $x, y \in S$
$$x \circ y = x + y + xy.$$
2. Sei S gleich der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ $(= 2^X)$ einer beliebigen Menge X und sei $\circ$ gegeben durch
$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S = Z_n^* = \{p \in \mathbb{Z}_n;\ \mathrm{ggT}(p, n) = 1\}$. $\circ$ sei gleich der Multiplikation ganzer Zahlen modulo n.

Aufgabe 4

Jede endliche Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n, deren Trägermenge die Menge aller Permutationen der Zahlen aus $[n]$ ist mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung.
Im Folgenden betrachten wir S_4.

1. Gegeben seien die Permutationen $a = (1\ 2)(3\ 4)$, $b = (2\ 3)(1\ 4)$ und $c = (1\ 2\ 3\ 4)$.
   (a) Berechnen Sie mit Maple die Ordnung der von $\{a, c\}$ erzeugten Untergruppe.
   (b) Berechnen Sie mit Maple die Ordnung der von $\{a, b\}$ erzeugten Untergruppe.
   (c) Berechnen Sie mit Maple eine Liste aller Elemente der von $\{a, b\}$ erzeugten Untergruppe.

   Hinweis: Wenden Sie die Maple-Funktionen `permgroup`, `grouporder` und `elements` an. In Maple wird beispielsweise die obige Permutation a geschrieben als
   `[[3,4],[1,2]]`.
2. Stellen Sie nun die in Aufgabe 1 hergeleitete Gruppe (isomorph) als Permutationsgruppe dar.

Bitte Maple-Berechnungsprotokolle mit zur Korrektur abgeben!