

### 5.3 Matchings in kantengewichteten bipartiten Graphen

Sei nun  $G = (U, V, E)$  ein bipartiter Graph mit einer Gewichtsfunktion  $w$  von den Kanten in die nichtnegativen reellen Zahlen. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass  $|U| = |V| (= n)$  und dass  $G = K_{n,n}$ , indem wir geeignet Knoten sowie Kanten mit Gewicht 0 hinzunehmen.

Damit können wir auch o.B.d.A. voraussetzen, dass jedes Matching maximalen oder minimalen Gewichts in  $G$  perfekt ist.

Indem wir  $w(u_i, v_j)$  durch  $w_{max} - w(u_i, v_j)$  ersetzen (wobei  $w_{max}$  das größte auftretende Gewicht ist), reduziert sich das Problem, ein Matching maximalen/minimalen Gewichts zu finden, auf das, eines minimalen/maximalen Gewichts zu finden.

Wir betrachten daher o.B.d.A. das Problem, in  $G$  ein perfektes Matching minimalen Gewichts zu finden.

Wir suchen also eine **Diagonale** der Größe  $n$  mit minimalem Gewicht. Sei  $W$  die Gewichtsmatrix. Verändern wir das Gewicht eines jeden Elements einer Zeile/Spalte von  $W$  um einen festen Betrag  $\delta$ , so ändert sich das Gewicht einer jeden Diagonale ebenfalls um  $\delta$  (da diese ja genau ein Element aus jeder Zeile bzw. aus jeder Spalte enthält), und eine Diagonale minimalen Gewichts bleibt minimal.

Durch Subtraktion geeigneter Konstanten von den Zeilen bzw. Spalten der Matrix  $W$  können wir daher eine äquivalente Gewichtsmatrix  $W'$  erhalten, die in jeder Zeile und Spalte mindestens eine 0 enthält, während alle Werte noch immer  $\geq 0$  sind.

## Beispiel 151

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 & 11 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 13 & 11 \\ 9 & 10 & 10 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \mathbf{0} & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Enthält die Matrix  $W'$  eine 0-Diagonale der Größe  $n$  (also eine Diagonale, deren Elemente alle  $= 0$  sind), so geben die Positionen dieser Diagonale auch die Kanten eines perfekten Matchings minimalen Gewichts im Graphen  $G$  mit der ursprünglichen Gewichtsfunktion  $w$  an, und wir sind fertig.

Andernfalls ist die maximale Länge einer 0-Diagonale in  $W'$  kleiner als  $n$ . Wir nennen eine Menge von Zeilen und Spalten einer Matrix  $W'$  eine **0-Überdeckung** von  $W'$ , falls diese Zeilen und Spalten alle Einträge  $= 0$  der Matrix beinhalten.

Im vorhergehenden Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden z.B. die Zeilen 1 und 4 zusammen mit der Spalte 2 eine 0-Überdeckung der Größe 3.

Aus Satz 136 wissen wir, dass die maximale Größe einer 0-Diagonale gleich der minimalen Größe einer 0-Überdeckung ist.

Falls  $W'$  also eine 0-Überdeckung der Größe  $< n$  hat, ändern wir die Gewichtsmatrix  $W'$  zu einer Gewichtsmatrix  $W''$  so, dass die Einträge  $\geq 0$  und minimale perfekte Matchings solche bleiben.

Es existiere also eine 0-Überdeckung von  $W'$ , die  $z$  Zeilen und  $s$  Spalten enthalte, mit  $z + s < n$ . Sei  $w_{min}$  das Minimum der **nicht überdeckten** Einträge von  $W'$ . Also ist  $w_{min} > 0$ .

Um aus  $W'$  die Matrix  $W''$  zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

- 1 subtrahiere  $w_{min}$  von **jedem** Element der  $n - e$  **nicht überdeckten** Zeilen (dadurch können vorübergehend negative Einträge entstehen);
- 2 addiere  $w_{min}$  zu **allen** Elementen der  $f$  **überdeckten** Spalten.

Damit ergibt sich für die Einträge  $w''_{ij}$  von  $W''$

$$w''_{ij} = \begin{cases} w'_{ij} - w_{min} & \text{falls } w'_{ij} \text{ nicht überdeckt ist} \\ w'_{ij} & \text{falls } w'_{ij} \text{ entweder von einer Zeile oder von} \\ & \text{einer Spalte überdeckt ist} \\ w'_{ij} + w_{min} & \text{falls } w'_{ij} \text{ von einer Zeile und von einer} \\ & \text{Spalte überdeckt ist} \end{cases}$$

Es sind also insbesondere alle  $w''_{ij}$  wieder  $\geq 0$ .

Für unsere Beispielmatrix ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & \mathbf{0} & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad =: W''$$

Die Anzahl der in  $W'$  sowohl durch eine Zeile als auch durch eine Spalte überdeckten Einträge ist  $s \cdot z$ , die der überhaupt nicht überdeckten Einträge  $n^2 - n(s + z) + sz$ .

Damit ergibt sich für die Gesamtgewichtsveränderung

$$\begin{aligned} \sum_{ij} w''_{ij} - w'_{ij}((sz) - (n^2 - n(s + z) + sz)) \cdot w_{min} \\ (n(s + z) - n^2) \cdot w_{min} \\ < 0 \end{aligned}$$

Da die Kantengewichte als ganzzahlig  $\geq 0$  vorausgesetzt sind, kann

die Transformation  $W' \Rightarrow W''$  nur endlich oft wiederholt werden, und der Algorithmus terminiert.



Man kann zeigen:

### Satz 152

*In einem kantengewichteten bipartiten Graphen mit ganzzahligen Kantengewichten  $\geq 0$  kann ein gewichtsmaximales Matching in Zeit*

$$O(n^3)$$

*bestimmt werden.*