



Abgabe: 24.04. - 1.05.08 (nach der Vorlesung)

## Übung Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

### Aufgabe 2.1 [4 Punkte] $\mathcal{O}$ -Notation, Eigenschaften

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- a)  $\forall c \in \mathbb{R}_+ : cf(n) = \Theta(f(n))$
- b)  $f(n) + g(n) = \Omega(f(n))$
- c)  $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow f(n) + g(n) = \mathcal{O}(f(n))$
- d)  $\mathcal{O}(f(n)) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$

### Aufgabe 2.2 [4 Punkte] $\mathcal{O}$ -Notation, Beispiele

Beweisen oder widerlegen Sie:

- a)  $n^2 + 10^6n \in \mathcal{O}(n^2)$
- b)  $n \log n \in \mathcal{O}(n)$  ( $\log$  bezeichnet den natürlichen Logarithmus)
- c)  $n \log n \in \Omega(n)$
- d)  $\log n \in o(n)$

**Hinweis:** Verwenden Sie dazu auch die vorigen Aufgaben.

### Aufgabe 2.3 [2 Punkte] $\mathcal{O}$ -Notation, Reihenfolge

Ordnen Sie die folgenden Funktionen in aufsteigender Reihenfolge nach ihrem asymptotischen Wachstum bzgl. der  $\mathcal{O}$ -Notation.

$$n^2 2^n \quad 1 \quad \log n \quad \sqrt{n} \quad 2^{(\log n)^2} \quad n! \quad 2^{2^n} \quad n^3 \quad 4n \quad (n \log n)^2$$

**Zusatzaufgabe 2.4** [+2 Punkte] **O-Notation, Ableitung**

**Hinweis:** Die Punkte dieser Aufgabe sind Bonuspunkte, die Abgabe ist demnach freiwillig. Um die Punkte zu erhalten, genügt es den Teil a zu beweisen.

Beweisen Sie: Seien  $f(n), g(n)$  für  $n \in \mathbb{R}^+$  positiv, stetig differenzierbar. Dann gilt:

a)  $f'(n) = \mathcal{O}(g'(n)) \Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n))$

b)  $f'(n) = \Omega(g'(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

c)  $f'(n) = \Theta(g'(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

d)  $f'(n) = o(g'(n)) \Rightarrow f(n) = o(g(n))$

e)  $f'(n) = \omega(g'(n)) \Rightarrow f(n) = \omega(g(n))$

**Hinweis:** Verwenden Sie als Zwischenschritt die Funktion  $h(n) = c \cdot g(n)$  für gewisse Konstante  $c$ . Daraus folgt dass  $h'(n) = c \cdot g'(n)$ . Für Teilaufgabe a) haben wir zum Beispiel:

$$\begin{aligned} f'(n) = \mathcal{O}(g'(n)) &\Rightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}_+ \forall n \geq n_0 : f'(n) \leq c \cdot g'(n) \\ &\Rightarrow \text{TODO} \\ &\Rightarrow f(n) \leq h(n) - h(n_0) + f(n_0) \\ &\Rightarrow \text{TODO} \\ &\Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \end{aligned}$$