Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2009/10

Übersicht

Definition: Distanz

geg.:

- ungerichteter Graph $G = (V, E)$
- nichtnegative Gewichtsfunktion $w(v)$ für Knoten $v \in V$
- positive Länge $\ell(e)$ für Kante $e \in E$

Sei $X_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ eine Menge von p Punkten auf G (dürfen auf Knoten oder an beliebigen Kantenpositionen liegen).

Distanz eines Knotens zur Positionsmenge:

$$d(v, X_p) = \min_{1 \leq i \leq p} \{d(v, x_i)\}$$

$d(v, x_i)$: Länge eines kürzesten Pfades zwischen v und x_i

Definition: Absolute p-Center

Sei

$$F(X_p) = \max_{v \in V}\{w(v) \cdot d(v, X_p)\}$$

und das Optimum X_p^* so, dass

$$F(X_p^*) = \min_{X_p \text{ auf } G}\{F(X_p)\}$$

Dann bezeichnet man X_p^* als [absolute] p-center
und $r_p = F(X_p^*)$ als [absolute] p-radius (von G).

Falls X_p beschränkt ist auf (echte) Knoten des Graphen, dann spricht man vom vertex p-center bzw. vertex p-radius.

Annahmen

- Alle Knoten haben gleiches Gewicht $w(v) = c$, o.B.d.A. $c = 1$ (ungewichteter Fall).
- Graph enthält keine Schleifen oder Multikanten.
- Länge jeder Kante $e = (v_r, v_s)$ ist gleich der Distanz der inzidenten Knoten, also $\ell(e) = d(v_r, v_s))$ (ansonsten könnte man e einfach eliminieren, ohne dass sich der p-Radius ändert)
- Wir gehen davon aus, dass die Distanzen zwischen allen Knotenpaaren bekannt sind. (Falls diese erst berechnet werden müssen erhöht sich die Komplexität um den Aufwand zur Lösung des APSP-Problems.)

Inverses Problem

geg.:

- $G = (V, E)$
- natürliche Zahl r

ges.:

- kleinste natürliche Zahl p, so dass der p-Radius von G nicht größer als r ist.

Problem:

- p heißt [absolute] domination number für Radius r.
- Ein entsprechendes p-center heißt [absolute] domination set für Radius r.
- Für ungewichtete Graphen und Radius 1 ergibt sich das bekannte Problem von domination number/set (welches $\mathcal{NP}$-vollständig ist!)

1-center / local center

- Vereinfachung (einelementige Menge X_1):

$$F(x) = \max_{v \in V}\{w(v) \cdot d(v,x)\}$$

- Um ein 1-center zu finden, sucht man nach einem "lokalen" Zentrum auf jeder Kante.
- Ein local center auf Kante $e \in E$ ist eine Position $x^*(e)$ auf e, so dass

$$F(x^*(e)) = \min_{x(e) \text{ auf } e}\{F(x(e))\}$$

wobei $r(e) = F(x^*(e))$ lokaler Radius von G auf e heißt.

$$r_1 = r(e_j) = \min_{1 \le i \le |E|}\{r(e_i)\}$$

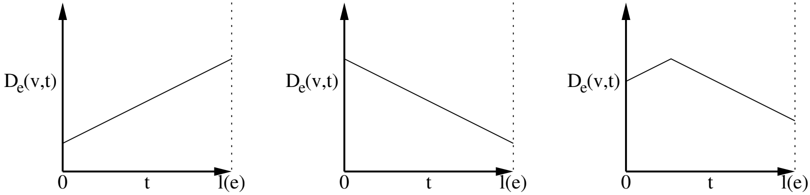
r_1: 1-radius von G und das entsprechende $x^*(e_j)$ ist ein 1-center.

1-center / local center

- Um ein local center auf Kante $e = (v_r, v_s)$ zu finden, betrachten wir für jeden Knoten $v \in V$ seine (gewichtete) Distanz zu einem Punkt $x(e)$ auf e.
- Sei $t = t(x(e))$ die Distanz von $x(e)$ zu v_r auf Kante e. Dann ist die gewichtete Distanz von v zu $x(e)$

$$D_e(v,t) = w(v) \cdot \min \left\{ \begin{array}{lcl} t & + & d(v_r, v), \\ \ell(e) - t & + & d(v_s, v) \end{array} \right\}$$

1-center / local center

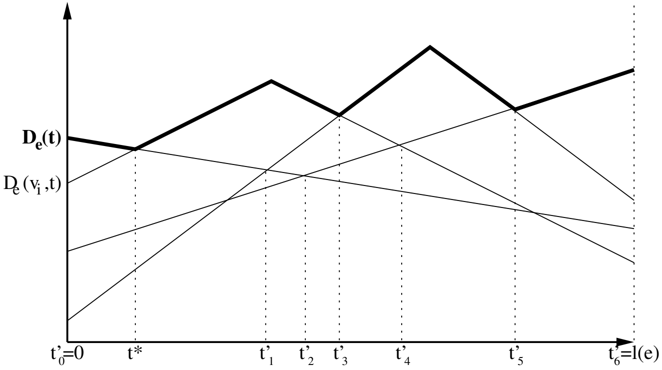


- Jede solche Funktion besteht aus ein oder zwei linearen Stücken mit Anstieg $\pm w(v)$.
- Im Fall von zwei Segmenten ist der Knickpunkt ein Maximum.

1-center / local center

Definiere für $0 \leq t \leq \ell(e)$

$$D_e(t) = \max_{v \in V}\{D_e(v,t)\}$$



1-center / local center

- Jeder Punkt $x^*(e)$, an dem $D_e(t)$ sein (absolutes) Minimum annimmt, ist ein local center auf e.
- $t^* = t(x^*(e))$ sei der Wert von t an dieser Stelle $x^*(e)$.
- Der Wert $D_e(t^*)$ ist der local-radius auf e.
- t^* ist ein beliebiger Punkt für den folgendes gilt:
  1. $t^* = 0$ oder $t^* = \ell(e)$ oder t^* ist ein Punkt, wo sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass ihre Anstiege im Schnittpunkt gegensätzliche Vorzeichen haben.
  2. Wenn T^* die Menge aller Punkte ist, die diese erste Voraussetzung erfüllen, dann ist

$$D_e(t^*) = \min_{t' \in T^*} \{D_e(t')\}$$

$\Rightarrow$ Höchstens $n(n-1)/2 + 2$ Punkte kommen als local-center von e in Frage.

1-center / local center

- Unter der Voraussetzung, dass die Distanzmatrix bekannt ist, kann man mit Hilfe der Funktionen

$$
\begin{aligned}
D_e(v,t) &= w(v) \cdot \min \left\{ \begin{array}{lcl} t & + & d(v_r, v), \\ \ell(e) - t & + & d(v_s, v) \end{array} \right\} \\
D_e(t) &= \max_{v \in V} \{ D_e(v,t) \}
\end{aligned}
$$

  den Wert $D_e(t)$ in $\mathcal{O}(n)$ Schritten an jedem der $\mathcal{O}(n^2)$ in Frage kommenden Punkte berechnen.
- D.h., bei einer direkten Implementierung von Bedingung 2 kann man ein local-center auf e in $\mathcal{O}(n^3)$ Schritten finden.

1-center / local center

- Kariv und Hakimi haben eine Methode vorgeschlagen, die in knoten-gewichteten Graphen ein local-center für eine Kante e in $\mathcal{O}(n \log n)$ Schritten findet.
- Damit kann man ein 1-center eines in $\mathcal{O}(mn \log n)$ berechnen.

- Für ein knoten-ungewichtetes Netzwerk haben Kariv und Hakimi einen Algorithmus von Komplexität $\mathcal{O}(n)$ zum Finden eines local-centers für eine Kante e präsentiert.
- Damit kann man ein 1-center in $\mathcal{O}(mn + n^2 \log n)$ berechnen.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

- Ein local center $x^*(e)$ ist entweder
  - an einem der Endpunkte v_r oder v_s der Kante oder
  - an einem Punkt $t^* \in [0, \ell(e)]$, wo sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ schneiden.
- Aufgrund des gleichen Gewichts für alle Knoten hat der Betrag des Anstiegs für alle Funktionen $D_e(v_i, t)$ den gleichen Wert.
- Damit gilt für zwei beliebige solche Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$, die sich nicht in einem ganzen Liniensegment überlagern, dass sie sich höchstens in einem Punkt schneiden und dass sie die beiden Anstiege in diesem Punkt umgekehrte Vorzeichen haben.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Definiere für jeden Knoten $v_i \in V$:

$$V_i = \{v \in V :\ D_e(v,0) \leq D_e(v_i,0)\} \qquad \bar{V}_i = V \setminus V_i$$

Falls $\bar{V}_i \neq \emptyset$, definiere auch Knoten $\bar{v}_i$ mit:

$$D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) = \max_{v \in \bar{V}_i} \{D_e(v, \ell(e))\}$$

(Falls es mehrere Knoten gibt, die diese Bedingung erfüllen, wählen wir den mit dem kleinsten Index.)

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Sei t_0 die Stelle, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass an der Stelle t_0 der Anstieg der Funktion $D_e(v_i, t)$ positiv ist, während der von $D_e(v_j, t)$ negativ ist.

Dann gilt

$$\begin{array}{rclcccccc} D_e(v_i, t) & < & D_e(v_j, t) & \text{für} & 0 & \leq & t & < & t_0 \\ D_e(v_i, t) & > & D_e(v_j, t) & \text{für} & t_0 & < & t & \leq & \ell(e) \end{array}$$

Folgerung

Unter den Bedingungen des vorigen Lemmas gilt

$$v_j \in \bar{V}_i \text{ und } v_i \in V_j$$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Lemma

Ein local center auf Kante e ist entweder auf einem der Endpunkte von e (bei $t = 0$ oder $t = \ell(e)$) oder an einer Stelle t_i, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(\bar{v}_i, t)$ schneiden.

Beweis.

- Der Fall der Kantenendpunkte ist klar.
- Wir betrachten ein local center auf e an der Stelle t^* mit $t^* \neq 0$ und $t^* \neq \ell(e)$.
- t^* ist die Stelle, an der sich zwei Funktionen $D_e(v_i, t)$ und $D_e(v_j, t)$ so schneiden, dass an der Stelle t^* der Anstieg der Funktion $D_e(v_i, t)$ positiv ist, während der von $D_e(v_j, t)$ negativ ist.

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Damit ist $v_j \in \bar{V}_i$.
- Es gilt also $\bar{V}_i \neq \emptyset$ und damit ist $\bar{v}_i$ definiert.
- Nach der Definition eines local centers (bzw. von $D_e(t)$) gilt $D_e(\bar{v}_i, t^*) \leq D_e(v_j, t^*)$.
- Im Falle von Gleichheit gilt das Lemma.
- Annahme: $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_j, t^*) = D_e(v_i, t^*)$

Local centers in knoten-ungewichteten Graphen

Beweis.

- Falls $D_e(\bar{v}_i, t)$ bei t^* positiv ansteigt, dann folgt aus $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_i, t^*)$, dass $D_e(\bar{v}_i, 0) < D_e(v_i, 0)$, ein Widerspruch zur Definition von $\bar{v}_i$.
- Falls $D_e(\bar{v}_i, t)$ bei t^* negativ ansteigt, dann folgt aus $D_e(\bar{v}_i, t^*) < D_e(v_j, t^*)$, dass $D_e(\bar{v}_i, \ell(e)) < D_e(v_j, \ell(e))$, ein Widerspruch zur Definition von $\bar{v}_i$ (weil nach Folgerung des letzten Lemmas $v_j \in \bar{V}_i$).
- Also gilt die Annahme nicht, sondern die Gleichheit und damit das ganze Lemma.

$\square$

Das Lemma reduziert die Anzahl möglicher Kandidaten für ein local center auf einer Kante e auf höchstens $n + 2$.