Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2009/10

Übersicht

Durchschnittlicher Grad in gerichteten Graphen

- Es ist nicht unbedingt offensichtlich, wie Dichte (i.S.d. Durchschnittsgrads) auf gerichtete Graphen zu übertragen ist.
- Durchschnittlicher Eingangs- und Ausgangsgrad sind gleich.

$\Rightarrow$ keine orientierungsabhängigen Maße

- Hubs & Authorities: Für gerichteten Graph $G = (V, E)$ und nichtleere (nicht unbedingt disjunkte) Knotenmengen $S, T \subseteq V$ sei $E(S, T)$ die Menge der Kanten, die von einem Knoten in S zu einem Knoten in T gehen:

$$E(S, T) = \{(u, v) : u \in S \text{ und } v \in T\}$$

Definiere **durchschnittlichen gerichteten Grad des Paars (S, T)** als (Kannan/Vinay)

$$\overline{\deg}_G(S, T) = \frac{|E(S, T)|}{\sqrt{|S| \cdot |T|}}$$

Durchschnittlicher gerichteter Grad

- S ist dann die Menge der Hubs,
  T ist die Menge der Authorities
- Wenn $S = T$, dann kommt genau der konventionelle Durchschnittsgrad heraus.
- Durchschnittsgrad-Maximum eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$:

$$\gamma^* = \max_{\substack{S, T \subseteq V \\ S \neq \emptyset, T \neq \emptyset}} \left\{ \overline{\deg}_G(S, T) \right\}$$

- Kann mit Linear Programming in Polynomialzeit gelöst werden (Charikar, 2000).

Dense ℓ-Subgraph

- Graph mit Durchschnittsgrad $\overline{\deg}(G)$ muss nicht unbedingt einen echten Teilgraphen mit gleichem Durchschnittsgrad enthalten.
- Maximum des Durchschnittsgrads eines Teilgraphs auf ℓ Knoten:

$$\gamma^*(G,\ell) = \max\left\{\overline{\deg}(G[U]) : U \subseteq V \text{ und } |U| = \ell\right\}$$

Problem

Problem:	***Dense-ℓ-Subgraph***
Eingabe:	*Graph G, Parameter $\ell \in \mathbb{N}$*
Frage:	*Eine Knotenmenge der Kardinalität ℓ mit maximalem induzierten Durchschnittsgrad*

Dense ℓ-Subgraph

- Optimierungsproblem **Dense ℓ-Subgraph** ist $\mathcal{NP}$-hart (Instanz $(G, \ell, \ell - 1)$ des zugehörigen Entscheidungsproblems entspricht der Suche nach einer Clique der Größe ℓ in G).

$\Rightarrow$ Wie sieht es mit Approximation aus?

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Algorithmus 6 : Approximation eines ℓ-Subgraph mit hohem $\overline{\deg}$

Input : Graph $G = (V, E)$ und
gerader Parameter $\ell \in \mathbb{N}$ (mit $|V| \geq \ell$)

Output : Menge von ℓ Knoten von G

Sortiere die Knoten in absteigender Reihenfolge ihrer Grade;
Sei H die Menge von $\frac{\ell}{2}$ Knoten von höchstem Grad;
Berechne $N_H(v) = |N(v) \cap H|$ für alle Knoten $v \in V \setminus H$;
Sortiere die Knoten in $V \setminus H$ in absteigender Reihenfolge der N_H-Werte;
Sei R die Menge von $\frac{\ell}{2}$ Knoten von $V \setminus H$ mit den höchsten N_H-Werten;
return $H \cup R$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Satz

Sei G ein Graph auf n Knoten und sei $\ell \in \mathbb{N}$ eine gerade natürliche Zahl mit $\ell \leq n$.
Sei $A(G, \ell)$ der Durchschnittsgrad des induzierten Teilgraphen, der vom vorstehenden Algorithmus ausgegeben wird.
Dann gilt:

$$\gamma^*(G, \ell) \leq \frac{2n}{\ell} \cdot A(G, \ell)$$

bzw.

$$A(G, \ell) \geq \frac{\ell}{2n} \cdot \gamma^*(G, \ell)$$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Beweis.

- Für Knotenteilmengen $U, U' \subseteq V$ sei $E(U, U')$ die Menge der Kanten mit einem Endpunkt in U und einem Endpunkt in U'.
- Sei $m_U = |E(G[U])|$
- Sei $\deg_H$ der Durchschnittsgrad der $\frac{\ell}{2}$ Knoten von G mit höchstem Grad bezüglich G. Es gilt: $\deg_H \geq \gamma^*(G, \ell)$.
- Man erhält für die Anzahl der Kanten zwischen H und dem Rest $V \setminus H$:

$$|E(H, V \setminus H)| = \deg_H \cdot |H| - 2m_H \geq \frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H \geq 0$$

Greedy-Approximation für **Dense ℓ-Subgraph**

Beweis.

- Weil der Algorithmus greedy (gierig) arbeitet, muss der Anteil der Kanten nach R (i.Vgl. zu $V \setminus H$) mindestens so groß sein, wie der Anteil der Knoten:

$$\frac{|E(H,R)|}{|E(H,V\setminus H)|} \geq \frac{|R|}{|V\setminus H|} = \frac{\ell/2}{n-\ell/2} = \frac{\ell}{2n-\ell} > \frac{\ell}{2n}$$

- Also ist die Gesamtzahl der Kanten in $G[H \cup R]$ mindestens

$$\left(\frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H\right) \cdot \frac{\ell}{2n} + m_H \geq \frac{\deg_H \cdot \ell^2}{4n}$$

□

Approximation von **Dense ℓ-Subgraph**

- Die Approximationsgüte wird umso besser, je größer ℓ im Vergleich zu n ist.

- Es gibt andere Approximationsverfahren mit Güte $\mathcal{O}(\frac{n}{\ell})$, z.B. durch rekursives Löschen von Knoten mit kleinstem Grad.

Übersicht

Zusammenhang in Graphen / Netzwerken

- beschäftigt sich mit der Stärke der Verbindung zwischen zwei Knoten in Bezug auf die Anzahl knoten- bzw. kantendisjunkter Wege
- "Eine Kette ist nur so stark wie ihr schwächstes Glied."

$\Rightarrow$ Wir suchen nach den schwächsten Elementen, die beim Entfernen die Verbindung zerstören.

Definition

Ein ungerichteter Graph heißt zusammenhängend, wenn es von jedem Knoten einen Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Knoten-Zusammenhang

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *k*-knotenzusammenhängend, falls $|V| > k$ und für jede echte Knotenteilmenge $X \subset V$ mit $|X| < k$ der Graph $G - X$ zusammenhängend ist.
Der Knotenzusammenhang $\kappa(G)$ des Graphen G ist die größte natürliche Zahl k, für die G k-knotenzusammenhängend ist.

Bemerkungen:

- Jeder nicht-leere Graph ist 0-knotenzusammenhängend, da es keine Teilmenge X mit $|X| < 0$ gibt.
- Obwohl es wünschenswert wäre, dass die Bezeichnung "1-knotenzusammenhängend" gleichzusetzen ist mit der Bezeichnung "zusammenhängend", wird üblicherweise der Graph bestehend aus nur einem einzelnen Knoten zwar als zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend bezeichnet.

Kanten-Zusammenhang und k-Komponenten

Definition

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt k-kantenzusammenhängend, falls $|V| \geq 2$ und für jede Kantenteilmenge $Y \subseteq E$ mit $|Y| < k$ der Graph $G - Y$ zusammenhängend ist.

Der Kantenzusammenhang $\lambda(G)$ des Graphen G ist die größte natürliche Zahl k, für die G k-kantenzusammenhängend ist.

Der Kantenzusammenhang eines unzusammenhängenden Graphen sowie des Graphen bestehend aus einem einzelnen Knoten ist 0.

Definition

Die maximalen k-fach knoten-/kanten-zusammenhängenden Teilgraphen werden als k-Knoten-/Kanten-Zusammenhangskomponenten bezeichnet.

Zusammenhang in gerichteten Graphen

Definition

Ein gerichteter Graph ist stark zusammenhängend, wenn es für jeden Knoten einen gerichteten Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler stark zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als starke Zusammenhangskomponente bezeichnet.

Knoten- und Kantenzusammenhang können auf gerichtete Graphen übertragen werden, indem man in der jeweiligen Definition fordert, dass $G - X$ bzw. $G - Y$ *stark zusammenhängend* ist.

Separatoren

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.
Eine Knotenteilmenge $C \subset V$ heißt Knoten-Separator, wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in $G - C$ größer als in G ist.

Falls zwei Knoten s und t zwar in G in der gleichen Zusammenhangskomponente sind, aber nicht in $G - C$, dann bezeichnet man C als s-t-Knoten-Separator.

Kanten-Separatoren und s-t-Kanten-Separatoren sind analog definiert.

s-t-Separatoren können auch auf gerichtete Graphen übertragen werden: eine Knoten- bzw. Kantenmenge ist dann ein s-t-Separator, wenn es keinen gerichteten Pfad mehr von s nach t gibt, nachdem die Menge aus dem Graph entfernt wurde.

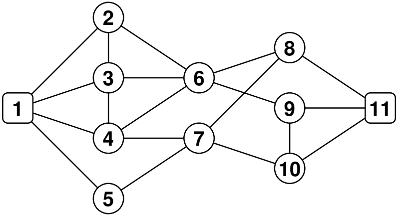
Disjunkte Pfade

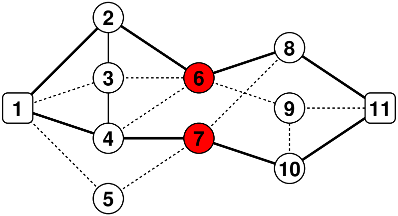
Definition

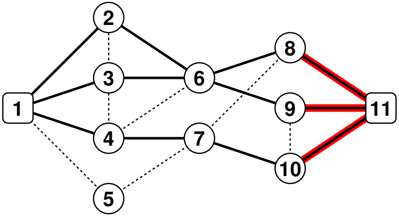
Zwei (gerichtete oder ungerichtete) Pfade von s nach t werden als knotendisjunkte s-t-Pfade bezeichnet, wenn sie keinen Knoten außer s und t gemeinsam haben.

Zwei Pfade werden als kantendisjunkte Pfade bezeichnet, wenn sie keine Kante gemeinsam haben.

Disjunkte *s*-*t*-Pfade







2 knotendisjunkte 1-11-Pfade 3 kantendisjunkte 1-11-Pfade

Lokaler Zusammenhang

Definition

Für zwei Knoten s und t eines Graphen G ist der lokale (Knoten-)Zusammenhang $\kappa_G(s,t)$ definiert als die minimale Anzahl von Knoten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von s nach t gibt.

Für den Fall, dass zwischen s und t eine Kante existiert, können sie nicht durch das Löschen von Knoten separiert werden. Deshalb wird der lokale (Knoten-)Zusammenhang in diesem Fall $\kappa_G(s,t) = n - 1$ definiert. (Anderenfalls wäre höchstens $\kappa_G(s,t) = n - 2$ möglich.)

Der lokale Kanten-Zusammenhang zweier Knoten s und t ist entsprechend definiert als die minimale Anzahl von Kanten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von s nach t gibt.

Lokaler Zusammenhang

Hinweis:
Für ungerichtete Graphen gilt $\kappa_G(s,t) = \kappa_G(t,s)$ und $\lambda_G(s,t) = \lambda_G(t,s)$, was für gerichtete Graphen im Allgemeinen nicht gilt.

Zweifachzusammenhang

Definition

Ein Artikulationsknoten ist ein Knoten, der beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.
Eine Brücke ist eine Kante, die beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.
Eine Zweifachzusammenhangskomponente ist ein maximaler 2-fach (knoten-)zusammenhängender Teilgraph.
Ein Block ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Artikulationsknoten enthält, d.h. die Menge aller Blocks eines Graphen besteht aus den isolierten Knoten, den Brücken, sowie den Zweifachzusammenhangskomponenten.

Block-Graph und CutPoint-Graph

Definition

Der Block-Graph $B(G)$ eines Graphen G hat jeweils einen Knoten für jeden Block von G, wobei zwei Knoten des Block-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Blöcke in G einen (Artikulations-)Knoten gemeinsam haben.
Der CutPoint-Graph $C(G)$ eines Graphen G hat jeweils einen Knoten für jeden Artikulationsknoten von G, wobei zwei Knoten des CutPoint-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Artikulationsknoten in G zum gleichen Block gehören.

Satz (Harary)

Für jeden Graphen gilt:

$$B(B(G)) = C(G) \quad \text{und} \quad B(C(G)) = C(B(G))$$

Block-CutPoint-Graph

Definition

Der Block-CutPoint-Graph eines Graphen G ist der bipartite Graph, dessen Knotenmenge aus je einem Knoten für jeden Artikulationsknoten von G und je einem Knoten für jeden Block von G besteht, wobei ein CutVertex-Knoten mit einem Block-Knoten genau dann durch eine Kante verbunden ist, wenn der Artikulationsknoten zu dem entsprechenden Block gehört.

Satz (Harary & Prins)

Der Block-CutPoint-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein Baum.

Fundamentale Ungleichung

Satz

Für jeden nicht-trivialen Graphen G gilt:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

"nicht-trivial" soll den Graph ohne Knoten und den Graph auf einem Knoten ausschließen, hier kommt es auf die genaue Definition von κ und λ an.

Beweis.

- Die inzidenten Kanten eines Knotens v mit $\deg(v) = \delta(G)$ bilden einen Kanten-Separator.

$\Rightarrow$ $\lambda(G) \leq \delta(G)$

Fundamentale Ungleichung

Beweis.

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens zwei Knoten. Betrachte minimalen Kanten-Separator, der die Knotenmenge in S und $\bar{S} = V \setminus S$ partitioniert.
- Für den Fall, dass alle Kanten zwischen S und $\bar{S}$ vorhanden sind, gilt $\lambda(G) = |S| \cdot |\bar{S}| \geq n - 1$ (und $\kappa(G)$ kann nicht größer als $n - 1$ sein).
- Anderenfalls existieren Knoten $x \in S$ und $y \in \bar{S}$ mit $\{x, y\} \notin E$, wobei die Nachbarn von x in $\bar{S}$ zusammen mit allen Knoten aus $S \setminus \{x\}$, die Nachbarn in $\bar{S}$ haben, einen Knoten-Separator bilden.
  Dieser Knoten-Separator ist höchstens so groß wie die Anzahl der Kanten von S nach $\bar{S}$, und er separiert mindestens x und y.

$\square$

Das n-Chain / n-Arc Theorem

Satz (Menger, 1927)

Seien P und Q Teilmengen der Knoten eines ungerichteten Graphen.
Dann ist die maximale Anzahl knotendisjunkter Pfade, die Knoten von P mit Knoten von Q verbinden, gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenmenge, die alle Pfade zwischen Knoten in P und Knoten in Q überschneidet bzw. unterbricht.