3.3 Gewichtsbalancierte Bäume

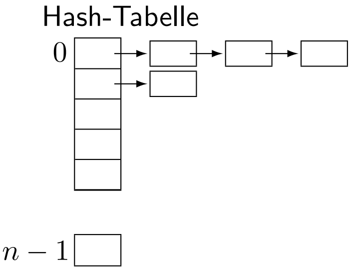
Siehe zu diesem Thema Seite 189ff in

Kurt Mehlhorn:
Data structures and algorithms 1: Sorting and searching,
EATCS Monographs on Theoretical Computer Science,
Springer Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984

4. Hashing

4.1 Grundlagen

- Universum U von Schlüsseln, z.B. $\subseteq \mathbb{N}_0$, $|U|$ groß
- Schlüsselmenge $S \subseteq U$, $|S| = m \leq n$
- array $T[0..n-1]$ Hashtabelle
- Hashfunktion $h : U \to [0..n-1]$



Problemstellung: Gegeben sei eine Menge M von Elementen, von denen jedes durch einen Schlüssel k aus der Menge U bezeichnet sei. Die Problemstellung ist: Wie muss die Speicherung der Elemente aus M bzw. der zugehörigen Schlüssel organisiert werden, damit jedes Element anhand seines Schlüssels möglich schnell lokalisiert werden kann?
Gesucht ist also eine Abbildung

$$h : U \to T$$

von der Menge aller Schlüssel in den Adressraum T der Maschine. Hierbei soll jedoch eine bisher nicht beachtete Schwierigkeit berücksichtigt werden: Die Menge U der möglichen Schlüsselwerte ist wesentlich größer als der Adressraum. Folglich kann die Abbildung h nicht injektiv sein, es gibt Schlüssel $k_1, k_2, \ldots$ mit $h(k_1) = h(k_2) = \ldots$.

Wir werden sehen, dass aufgrund dieses Umstandes die Speicherstelle eines Elements mit Schlüssel k von einem anderen Element mit einem anderen Schlüssel l besetzt sein kann und mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch sein wird: Es treten Kollisionen auf.

Satz 23

In einer Hashtabelle der Größe n mit m Objekten tritt mit Wahrscheinlichkeit

$$\geq 1 - e^{\frac{-m(m-1)}{2n}} \approx 1 - e^{\frac{-m^2}{2n}}$$

mindestens eine Kollision auf, wenn für jeden Schlüssel jede Hashposition gleich wahrscheinlich ist.

Beweis:

Sei A_m das Ereignis, dass unter m Schlüsseln keine Kollision auftritt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Pr[A_m] &= \prod_{j=0}^{m-1} \frac{n-j}{n} = \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \\ &\le \prod_{j=0}^{m-1} e^{-\frac{j}{n}} = e^{-\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{n}} = e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}\ .\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 24

Hat eine Hashtabelle der Größe n *mindestens* $\omega(\sqrt{n})$ *Einträge und ist für jeden Schlüssel jede Hashposition gleich wahrscheinlich, so tritt mit Wahrscheinlichkeit* $1 - o(1)$ *mindestens eine Kollision auf.*

Um die Kollisionszahl möglichst gering zu halten, müssen Hashfunktionen gut streuen.

Definition 25

1. Eine Hashfunktion

$$h : U \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

heißt perfekt für $S \subseteq U$, wenn für alle $j, k \in S, j \neq k$ gilt

$$h(j) \neq h(k) \ .$$

2. Eine Klasse $\mathcal{H}$ von Hashfunktionen $h : U \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ heißt perfekt, falls $\mathcal{H}$ für jedes $S \subseteq U$ mit $|S| = n$ eine für S perfekte Hashfunktion enthält.

Grundsätzliche Fragestellungen:

1. Wie schwierig ist es, perfekte Hashfunktionen darzustellen (also: was ist ihre Programmgröße)?
2. Wie schwierig ist es, gegeben S, eine für S perfekte Hashfunktion zu finden?
3. Wie schwierig ist es, gegeben $k \in S$, $h(k)$ für eine für S perfekte Hashfunktion auszuwerten?

Typische „praktische“ Hashfunktionen:

$$h(k) = k \bmod n \qquad \text{(Teilermethode)}$$

$$h(k) = \lfloor n(ak - \lfloor ak \rfloor) \rfloor \text{ für } a < 1 \qquad \text{(Multiplikationsmethode)}$$

Wir betrachten zunächst Methoden der Kollisionsbehandlung.

4.2 Methoden zur Kollisionsauflösung

Wir unterscheiden grundsätzlich

- geschlossene und
- offene Hashverfahren.

Bei geschlossenen Hashverfahren werden Kollisionen nicht wirklich aufgelöst.

4.2.1 Geschlossene Hashverfahren (Chaining)

Die Hashtabelle ist ein Array von n linearen Listen, wobei die i-te Liste alle Schlüssel k beinhaltet, für die gilt:

$$h(k) = i\,.$$

Zugriff: Berechne $h(k)$ und durchsuche die Liste $T[h(k)]$.

Einfügen: Setze neues Element an den Anfang der Liste.

Sei

$$\delta_h(k_1, k_2) = \begin{cases} 1 \text{ falls } h(k_1) = h(k_2) \text{ und } k_1 \neq k_2 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

und

$$\delta_h(k, S) = \sum_{j \in S} \delta_h(j, k), \text{ Anzahl Kollisionen von } k \text{ mit } S\,.$$

Die Zugriffskosten sind:

$$\boxed{\mathcal{O}(1 + \delta_h(k, S))}$$

Sei A eine Strategie zur Kollisionsauflösung. Wir bezeichnen im Folgenden mit

- A^+ den mittleren Zeitbedarf für eine erfolgreiche Suche unter Verwendung von A;
- A^- den mittleren Zeitbedarf für eine erfolglose Suche unter Verwendung von A;
- $\alpha := \frac{m}{n}$ den Füllfaktor der Hashtabelle.

Sondierungskomplexität für Chaining

Falls auf alle Elemente in der Hashtabelle mit gleicher Wahrscheinlichkeit zugegriffen wird, ergibt sich

- A^-: mittlere Länge der n Listen; da $\frac{m}{n} = \alpha$, folgt

$$A^- \leq 1 + \alpha\,.$$

- A^+:

$$\begin{aligned}
A^+ &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(1 + \frac{i-1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}\left(1 + \frac{i}{n}\right)\\
&= 1 + \frac{m(m-1)}{2nm}\\
&\leq 1 + \frac{m}{2n} = 1 + \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Für festen Füllfaktor α ergibt sich also im Mittel Laufzeit $\Theta(1)$.

4.2.2 Hashing mit offener Adressierung

Beispiele:

- Lineares Sondieren (linear probing)
- Quadratisches Sondieren
- Double Hashing
- Robin-Hood-Hashing
- ...

Bei dieser Methode werden die Elemente nicht in der Liste, sondern direkt in der Hash-Tabelle gespeichert. Wird bei *Insert* oder *IsElement*, angewendet auf Schlüssel k, ein Element mit Schlüssel $\neq k$ an der Adresse $h(k)$ gefunden, so wird auf deterministische Weise eine alternative Adresse berechnet. Für jeden Schlüssel $k \in U$ wird somit eine Reihenfolge (Sondierungsfolge) von Positionen in $T[\ ]$ betrachtet, um k zu speichern bzw. zu finden.

Sondieren:

Sei $s(j, k) : [0..n-1] \times U \to [0..n-1]$;
Definiere $h(j, k) = (h(k) - s(j, k)) \bmod n$; $\qquad (0 \le j \le n-1)$
Starte mit $h(0, k)$, dann, falls $h(0, k)$ belegt, $h(1, k)$, ...

Grundsätzliches Problem:
Sei $h(k) = h(k')$ für zwei Schlüssel $k, k' \in S$. Werde zunächst k eingefügt, dann k', dann k gelöscht. Wie findet man k'?
(Beachte: k' steht nicht unmittelbar an $h(k')$.)

Lösungsvorschlag: Markiere k als gelöscht, entferne es aber nicht! Wenn Speicher gebraucht wird, k überschreiben.

Beispiele für Sondierungen

Lineares Sondieren:
Setze $s(j,k) = j$ d.h. sondiere gemäß
$h(k), h(k) - 1, \ldots, 0, n - 1, .., h(k) + 1.$
Es wird für *IsElement* solange rückwärts gesucht, bis entweder das Element mit Schlüssel k oder eine freie Position gefunden ist. Im letzteren Fall ist das gesuchte Element nicht in der Hash-Tabelle enthalten.

Problem: Es entstehen primäre Häufungen (primary clustering) um diejenigen Schlüssel herum, die beim Einfügen eine Kollision hervorgerufen haben.

Satz 26

Die durchschnittliche Anzahl der Schritte beim linearen Sondieren ist

$$\mathbb{E}[\#\ \textit{Sondierungsschritte}] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)}\right) & \textit{erfolgreich} \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right) & \textit{erfolglos} \end{cases}$$

Einige Werte:

α	erfolgreich	erfolglos
0.5	1.5	2.5
0.9	5.5	50.5
0.95	10.5	200.5

Beispiele für Sondierungen

Quadratisches Sondieren:
Setze $s(j,k) = (-1)^j \lceil \frac{j}{2} \rceil^2$, d.h. sondiere nach
$h(k), h(k)+1, h(k)-1, h(k)+4, h(k)-4, \ldots$.

Frage: Ist das überhaupt eine Permutation von $[0..n-1]$? Ist $s(j,k)$ geeignet, alle Positionen zu erreichen?

Man kann zeigen, dass für Primzahlen n von der Form $4i+3$ die Sondierungsgröße $(h(k) - s(j,k)) \bmod n$ eine Permutation von $[0..n-1]$ liefert.

Problem: Sekundäres Clustering

Satz 27

Die durchschnittliche Anzahl der Schritte bei quadratischem Sondieren ist

$$\mathbb{E}[\#\ \textit{Sondierungsschritte}] = \begin{cases} 1 + \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) - \frac{\alpha}{2} & \textit{erfolgreich} \\ \frac{1}{1-\alpha} - \alpha + \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) & \textit{erfolglos} \end{cases}$$

Einige Werte:

α	erfolgreich	erfolglos
0.5	1.44	2.19
0.9	2.85	11.4
0.95	3.52	22.05

Beispiele für Sondierungen

Double Hashing:
Setze $s(j,k) = jh'(k)$, wobei h' eine zweite Hashfunktion ist. $h'(k)$ muss relativ prim zu n gewählt werden, damit
$(h(k) - s(j,k)) \bmod n$ eine Permutation der Hashadressen wird.

Satz 28

Die durchschnittliche Anzahl der Sondierungen bei Double Hashing ist

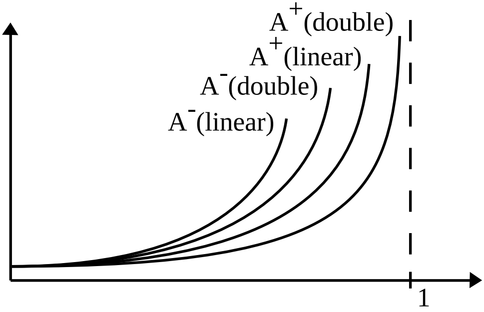
$$\mathbb{E}[\#\ \textit{Sondierungsschritte}] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha} & \textit{erfolgreich} \\ \frac{1}{1-\alpha} & \textit{erfolglos} \end{cases}$$

Einige Werte:

α	erfolgreich	erfolglos
0.5	1.39	2
0.9	2.55	10
0.95	3.15	20

Zum Beispiel: $h'(k) = 1 + k \bmod (n-2)$ (mit $n > 2$ prim).

Beispiele für Sondierungen



Sondierungskomplexität