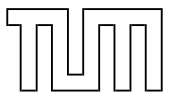
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Sommersemester 2010



Übersicht

1. Graphen
   - Kürzeste Wege

Bellman-Ford-Algorithmus

```
void BellmanFord(Node s) {
  d[s] = 0;   parent[s] = s;
  for (int i = 0; i < n − 1; i++) {   // n − 1 Runden
    foreach (e = (v, w) ∈ E)
      if (d[v] + c(e) < d[w]) {   // kürzerer Weg?
        d[w] = d[v] + c(e);
        parent[w] = v;
      }
  }
  foreach (e = (v, w) ∈ E)
    if (d[v] + c(e) < d[w]) {   // kürzerer Weg in n-ter Runde?
      infect(w);
}
```

Bellman-Ford-Algorithmus

```
void infect(Node v) {   // −∞-Knoten
  if (d[v] > −∞) {
    d[v] = −∞;
    foreach (e = (v, w) ∈ E)
      infect(w);
  }
}
```

Gesamtlaufzeit: $\mathcal{O}(m \cdot n)$

Bellman-Ford-Algorithmus

Bestimmung der Knoten mit Distanz $-\infty$:

- betrachte alle Knoten, die in der n-ten Phase noch Distanzverbesserung erfahren
- aus jedem Kreis mit negativem Gesamtgewicht muss mindestens ein Knoten dabei sein
- jeder von diesen Knoten aus erreichbare Knoten muss Distanz $-\infty$ bekommen
- das erledigt hier die infect-Funktion
- wenn ein Knoten zweimal auftritt (d.h. der Wert ist schon $-\infty$), wird die Rekursion abgebrochen

Bellman-Ford-Algorithmus

Bestimmung eines negativen Zyklus:

- bei den oben genannten Knoten sind vielleicht auch Knoten, die nur an negativen Kreisen über ausgehende Kanten angeschlossen sind, die selbst aber nicht Teil eines negativen Kreises sind
- Rückwärtsverfolgung der parent-Werte, bis sich ein Knoten wiederholt
- Kanten vom ersten bis zum zweiten Auftreten bilden einen negativen Zyklus

Bellman-Ford-Algorithmus

Ursprüngliche Idee der Updates vorläufiger Distanzwerte stammt von Lester R. Ford Jr.

Verbesserung (Richard E. Bellman / Edward F. Moore):

- verwalte eine FIFO-Queue von Knoten, zu denen ein kürzerer Pfad gefunden wurde und deren Nachbarn am anderen Ende ausgehender Kanten noch auf kürzere Wege geprüft werden müssen
- wiederhole: nimm ersten Knoten aus der Queue und prüfe für jede ausgehende Kante die Distanz des Nachbarn

  falls kürzerer Weg gefunden, aktualisiere Distanzwert des Nachbarn und hänge ihn an Queue an (falls nicht schon enthalten)
- Phase besteht immer aus Bearbeitung der Knoten, die am Anfang des Algorithmus (bzw. der Phase) in der Queue sind (dabei kommen während der Phase schon neue Knoten ans Ende der Queue)

Kürzeste einfache Pfade bei beliebigen Kantengewichten

Achtung!

Fakt

Die Suche nach kürzesten einfachen Pfaden
(also ohne Knotenwiederholungen / Kreise)
in Graphen mit beliebigen Kantengewichten
(also möglichen negativen Kreisen)
ist ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem.

(Man könnte Hamilton-Pfad-Suche damit lösen.)

All Pairs Shortest Paths

gegeben:

- Graph mit beliebigen Kantengewichten,
  der aber keine negativen Kreise enthält

gesucht:

- Distanzen / kürzeste Pfade zwischen allen Knotenpaaren

Naive Strategie:

- n-mal Bellman-Ford-Algorithmus
  (jeder Knoten einmal als Startknoten)

$\Rightarrow$ $O(n^2 \cdot m)$

All Pairs Shortest Paths

Bessere Strategie:

- reduziere n Aufrufe des Bellman-Ford-Algorithmus auf n Aufrufe des Dijkstra-Algorithmus

Problem:

- Dijkstra-Algorithmus funktioniert nur für nichtnegative Kantengewichte

Lösung:

- Umwandlung in nichtnegative Kantenkosten ohne Verfälschung der kürzesten Wege

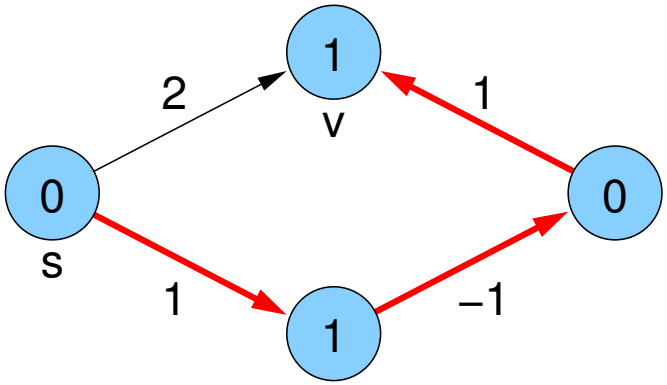
All Pairs Shortest Paths

Naive Idee:

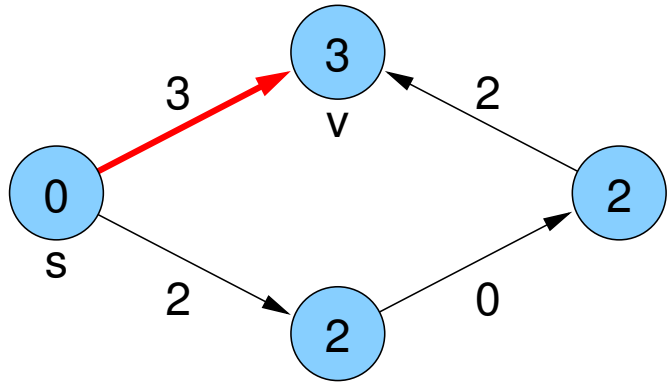
- negative Kantengewichte eliminieren, indem auf jedes Kantengewicht der gleiche Wert c addiert wird

$\Rightarrow$ verfälscht kürzeste Pfade

Original



Kantenkosten +1



All Pairs Shortest Paths

Sei $\Phi : V \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion, die jedem Knoten ein Potential zuordnet.

Modifizierte Kantenkosten von $e = (v, w)$:

$$\bar{c}(e) = \Phi(v) + c(e) - \Phi(w)$$

Lemma

Seien p und q Wege von v nach w in G.

$c(p)$ und $c(q)$ bzw. $\bar{c}(p)$ und $\bar{c}(q)$ seien die aufsummierten Kosten bzw. modifizierten Kosten der Kanten des jeweiligen Pfads.

Dann gilt für jedes Potential Φ:

$$\bar{c}(p) < \bar{c}(q) \quad \Leftrightarrow \quad c(p) < c(q)$$

All Pairs Shortest Paths

Beweis.

Sei $p = (v_1, \ldots, v_k)$ beliebiger Weg und $\forall i: \; e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{c}(p) &= \sum_{i=1}^{k-1} \bar{c}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (\Phi(v_i) + c(e_i) - \Phi(v_{i+1})) \\ &= \Phi(v_1) + c(p) - \Phi(v_k) \end{aligned}$$

d.h. modifizierte Kosten eines Pfads hängen nur von ursprünglichen Pfadkosten und vom Potential des Anfangs- und Endknotens ab.
(Im Lemma ist $v_1 = v$ und $v_k = w$) □

All Pairs Shortest Paths

Lemma

Annahme:

- *Graph hat keine negativen Kreise*
- *alle Knoten von s aus erreichbar*

Sei für alle Knoten v das Potential $\Phi(v) = d(s, v)$.

Dann gilt für alle Kanten e: $\bar{c}(e) \geq 0$

Beweis.

- für alle Knoten v gilt nach Annahme: $d(s, v) \in \mathbb{R}$ (also $\neq \pm\infty$)
- für jede Kante $e = (v, w)$ ist

$$\begin{aligned} d(s, v) + c(e) &\geq d(s, w) \\ d(s, v) + c(e) - d(s, w) &\geq 0 \end{aligned}$$

All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

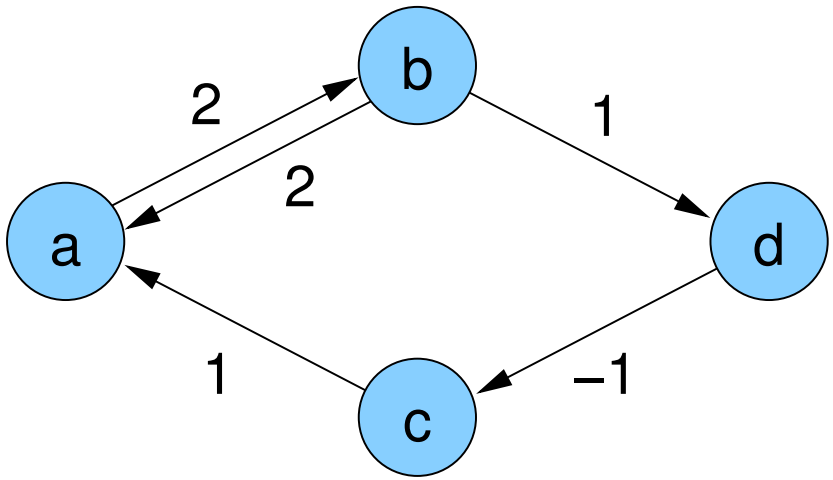
- füge neuen Knoten s und Kanten (s, v) für alle v hinzu mit $c(s, v) = 0$

$\Rightarrow$ alle Knoten erreichbar

- berechne $d(s, v)$ mit Bellman-Ford-Algorithmus
- setze $\Phi(v) = d(s, v)$ für alle v
- berechne modifizierte Kosten $\bar{c}(e)$
- berechne für alle Knoten v die Distanzen $\bar{d}(v, w)$ mittels Dijkstra-Algorithmus mit modifizierten Kantenkosten auf dem Graph ohne Knoten s
- berechne korrekte Distanzen $d(v, w) = \bar{d}(v, w) + \Phi(w) - \Phi(v)$

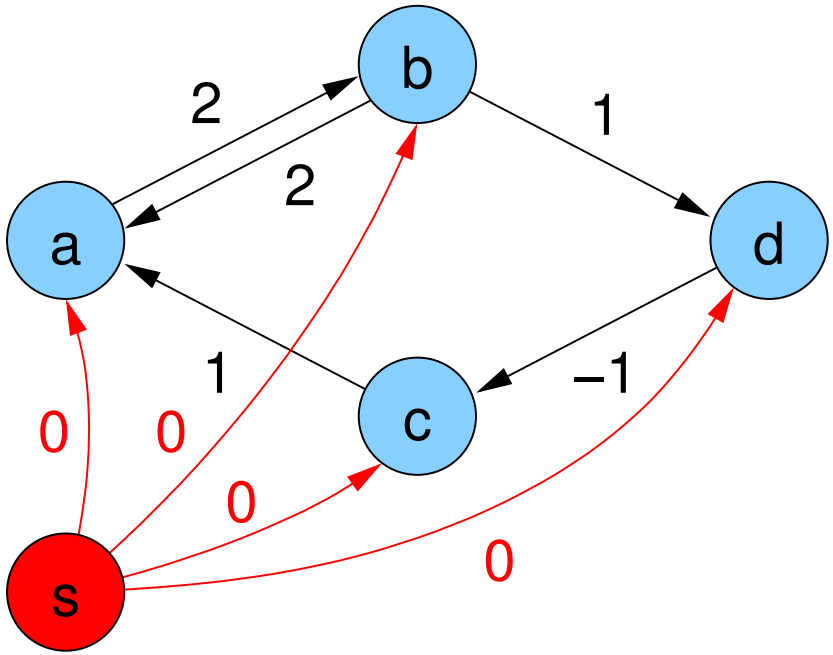
All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

Beispiel:



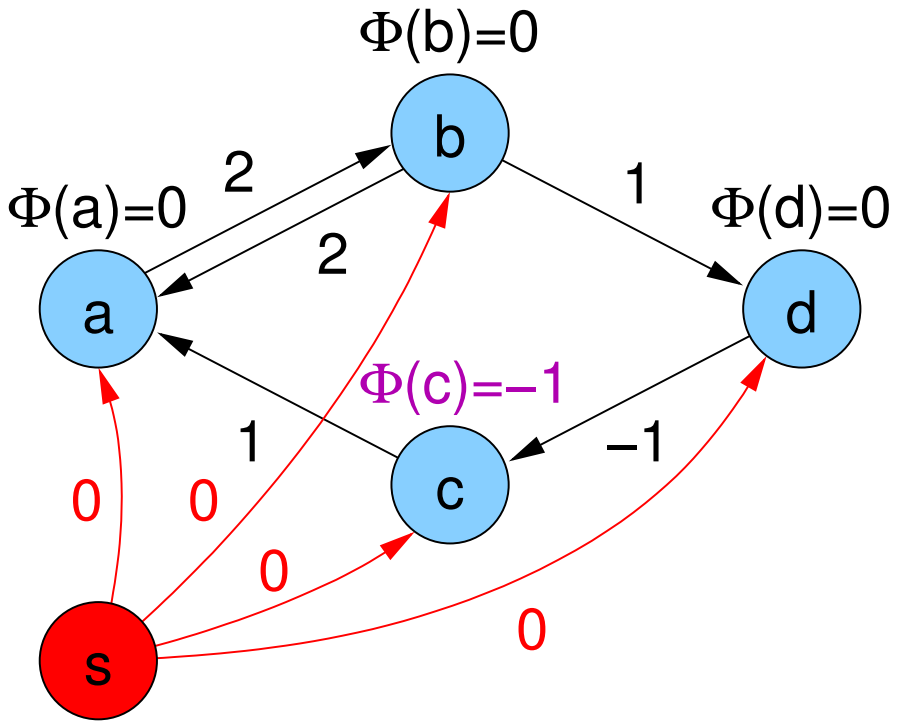
All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

1. künstliche Quelle s:



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

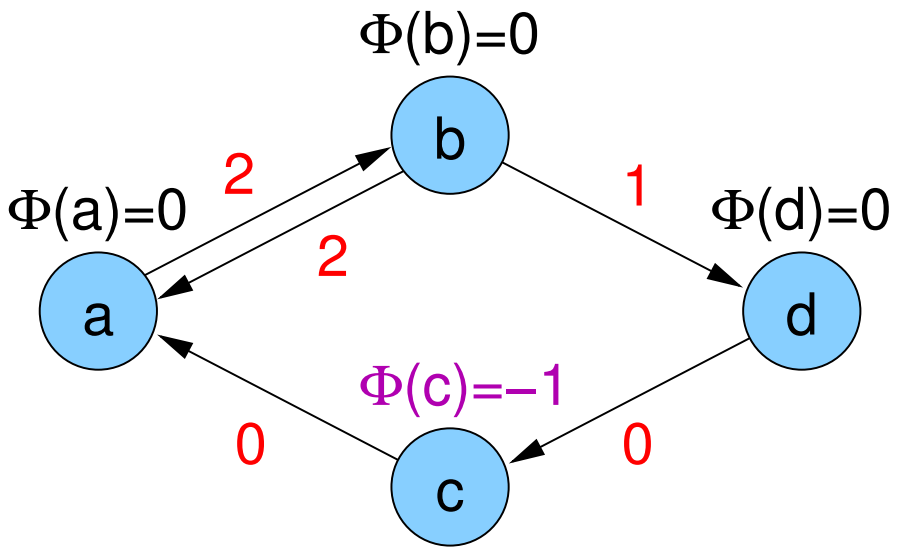
2. Bellman-Ford-Algorithmus auf s:



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

3. $\bar{c}(e)$-Werte für alle $e = (v, w)$ berechnen:

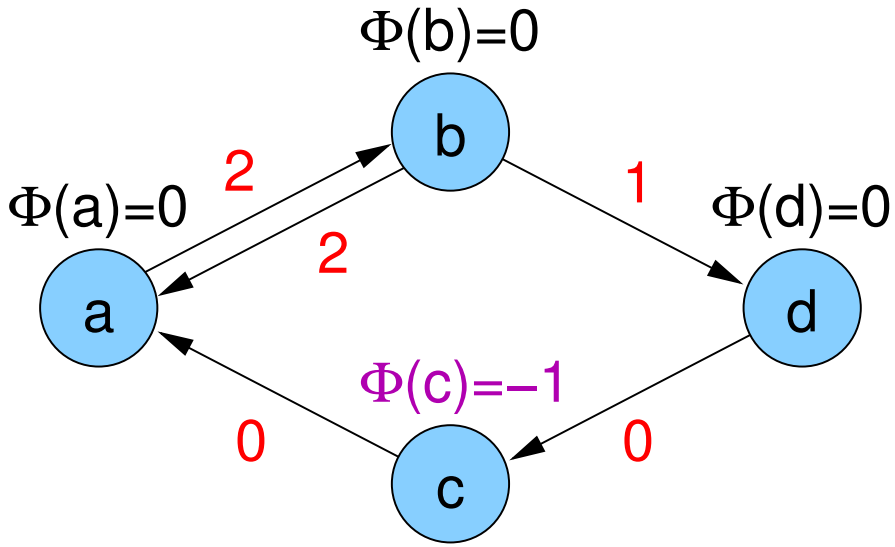
$$\bar{c}(e) = \Phi(v) + c(e) - \Phi(w)$$



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

4. Distanzen $\bar{d}$ mit modifizierten Kantengewichten via Dijkstra:

$\bar{d}$	a	b	c	d
a	0	2	3	3
b	1	0	1	1
c	0	2	0	3
d	0	2	0	0

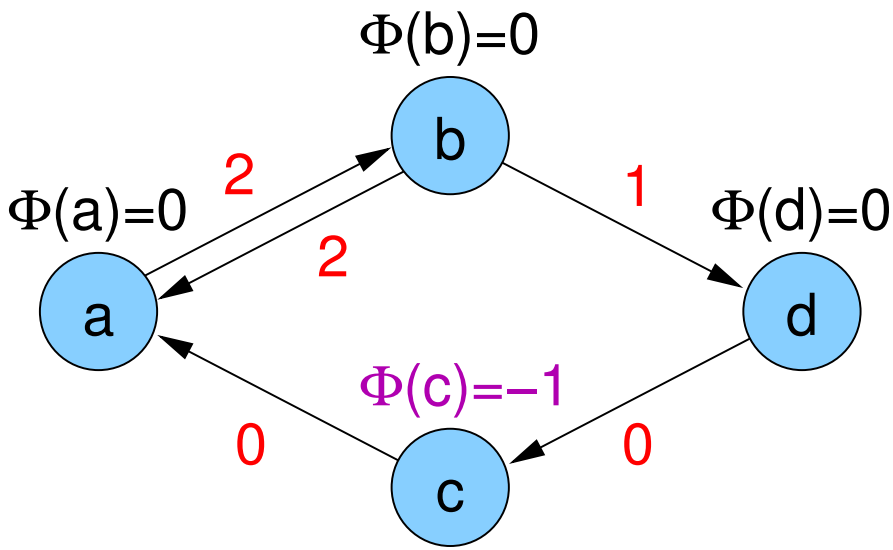


All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

5. korrekte Distanzen berechnen mit Formel

$$d(v,w) = \bar{d}(v,w) + \Phi(w) - \Phi(v)$$

d	a	b	c	d
a	0	2	2	3
b	1	0	0	1
c	1	3	0	4
d	0	2	−1	0



All Pairs Shortest Paths / Johnson-Algorithmus

Laufzeit:

$$\begin{aligned} T(APSP) &= O(T_{\text{Bellman-Ford}}(n+1, m+n) + n \cdot T_{\text{Dijkstra}}(n, m)) \\ &= O((m+n) \cdot (n+1) + n(n \log n + m)) \\ &= O(m \cdot n + n^2 \log n) \end{aligned}$$

(bei Verwendung von Fibonacci Heaps)