

# Ein Beispiel aus der Ramsey-Theorie:

## Satz 33

*In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich gegenseitig kennen, oder 3 Personen, von denen keiner die beiden anderen kennt.*

## Beweis:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ . Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} & \{2, \dots, 6\} \rightarrow \{0, 1\} \\ & \{2, \dots, 6\} \ni i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i\text{“} \\ 0 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i \text{ nicht“} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus dem **verallgemeinerten Schubfachprinzip** folgt: Es gibt mindestens 3 Leute  $\in \{p_2, \dots, p_6\}$ , die  $p_1$  kennen, oder es gibt mindestens 3 Leute, die  $p_1$  nicht kennen.

Wir betrachten die erste Alternative, die zweite ist analog. O. B. d. A. kennt  $p_1$   $p_2$ ,  $p_3$  und  $p_4$ .

### 1. Fall:

$(\exists p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}) [i \neq j \text{ und } p_i \text{ kennt } p_j]$ , z. B.  $i = 2, j = 4$ . Dann erfüllen  $\{p_1, p_i, p_j\}$  den ersten Teil der Behauptung.

### 2. Fall: (Komplement des 1. Falls!)

$(\forall p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}) [i \neq j \Rightarrow p_i \text{ kennt } p_j \text{ nicht}]$ . Dann erfüllen  $\{p_2, p_3, p_4\}$  den zweiten Teil der Behauptung. □

## Beispiel 34 (Indirekter Beweis, Wohlordnungseigenschaft)

### Satz 35

Sei  $S$  eine endliche Menge  $\neq \emptyset$ , und sei  $f : S \rightarrow S$  eine Abbildung von  $S$  in  $S$ . Dann gilt:

$$(\exists r \in \mathbb{N})[f^r(S) = f(f^r(S))].$$

Dabei ist  $f^0 : S \rightarrow S$  als die Identität auf  $S$  und, für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f^{n+1}$  als  $f \circ f^n$  definiert.

## Beweis:

Falls  $f$  bijektiv ist, dann erfüllt  $r = 1$  die Behauptung. Wir nehmen daher an, dass  $f$  nicht bijektiv, also nicht surjektiv ist, so dass  $f(S) \subsetneq S$ . Man beachte, dass für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt, dass  $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$ !

**Weitere Annahme:** Für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt  $f^{m+1}(S) \subsetneq f^m(S)$ .

In diesem Fall hätte die Menge  $\{|f^m(S)|; m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$  kein *kleinstes Element*, da stets  $|f^{m+1}(S)| < |f^m(S)|$ .

**Widerspruch zur Wohlordnungseigenschaft!**

Sei also  $m \in \mathbb{N}$  minimal mit der Eigenschaft

$$f^{m+1}(S) = f^m(S) .$$

Dann erfüllt  $r = m$  die Behauptung. □

## Alternativer, direkter Beweis

### Beweis:

Man beachte, dass für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$ !

Die Menge  $\{|f^m(S)|; m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_0$  ist nicht leer und besitzt deshalb aufgrund der Wohlordnungseigenschaft ein minimales Element  $|f^r(S)|$ .

Damit gilt  $|f^r(S)| \leq |f^{r+1}(S)|$ .

Wegen  $f^{r+1}(S) \subseteq f^r(S)$  folgt

$$|f^r(S)| = |f^{r+1}(S)|,$$

also auch  $f^r(S) = f^{r+1}(S)$ .



## Beispiel 36

### Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  und  $n$  ungerade. Dann lässt sich  $n$  als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

### Beweis:

Falls  $n = x^2 - y^2$  mit  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x > y$ , dann gilt  $n = (x - y)(x + y)$ .

Sei nun  $s := x + y$  und  $t := x - y$ . Dann ist

$$s > t > 0$$

$$n = s \cdot t$$

$$x = (s + t)/2$$

$$y = (s - t)/2$$

Also müssen  $s$  und  $t$  beide gerade oder beide ungerade sein.

## Beweis (Forts.):

Da

$$s > t > 0$$

$$n = s \cdot t$$

$$x = (s + t)/2$$

$$y = (s - t)/2$$

kann man für ungerades  $n$  stets  $s := n$  und  $t := 1$  setzen und erhält damit  $x = (n + 1)/2$  und  $y = (n - 1)/2$ , die die Behauptung erfüllen! □

## Bemerkungen:

- 1 Falls  $n$  eine ungerade Primzahl ist, sind  $s$  und  $t$  eindeutig bestimmt und es gibt genau eine Lösung für  $x$  und  $y$ .
- 2 Für allgemeine  $n$  kann es mehr als eine Lösung geben, z.B. für  $n = 15$

$$s = 5, t = 3 \text{ und } 15 = 16 - 1, \text{ oder}$$
$$s = 15, t = 1 \text{ und } 15 = 64 - 49.$$

- 3 Auch für gerade  $n$  kann es Lösungen geben, z.B.

$$8 = 9 - 1$$
$$48 = 7^2 - 1^2$$
$$48 = 8^2 - 4^2$$



## 4.7 Einige Sprechweisen

- ① Wir sagen  
„Eine Bedingung/Eigenschaft  $A$  ist **hinreichend** für eine Eigenschaft  $B$ “,  
falls

$$A \Rightarrow B.$$

- ② Wir sagen  
„Eine Bedingung/Eigenschaft  $A$  ist **notwendig** für eine Eigenschaft  $B$ “,  
falls

$$A \Leftarrow B \text{ (bzw. } B \Rightarrow A \text{ )}.$$

- ③ Wir sagen  
„Eine Bedingung/Eigenschaft  $A$  ist **notwendig und hinreichend** für eine Eigenschaft  $B$ “,  
falls

$$A \Leftrightarrow B \text{ (bzw. } A \equiv B \text{ )}.$$

## 4.8 Folgen und Grenzwerte

$R$  bezeichne einen Bereich wie z.B.  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{N}_0$ , oder  $\mathbb{Z}$ .

### Definition 37

- ① Sei  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$ . Eine **endliche Folge** reeller (bzw. rationaler, natürlicher, ganzer) Zahlen

$$(a_i)_{0 \leq i \leq k}$$

ist eine Abbildung

$$\{0, 1, \dots, k\} \ni i \mapsto a_i \in R.$$

- ② Eine **unendliche Folge**

$$(a_n)_{n \geq 0}$$

ist eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto a_n \in R.$$

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  eine reelle Folge.

① Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Wir sagen

„Die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  nach  $a$ “,  
und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

falls gilt:

$$(\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\epsilon)[|a_n - a| < \epsilon].$$

② Wir sagen

„Die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $+\infty$ “,  
und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

falls gilt:

$$(\forall M \in \mathbb{N} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M)[a_n > M].$$

## Beispiel 38

Sei für  $n \in \mathbb{N}$   $a_n := \frac{1}{n} \sin n$ .

Behauptung:

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert (für  $n \rightarrow \infty$ ) gegen 0.

Beweis:

Sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N > \epsilon^{-1}$ . Dann gilt für  $n \geq N$ :

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} |\sin n| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$



## Bemerkungen:

- 1 Falls es für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kein  $a \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

so sagen wir, „die Folge  $(a_n)_{n \geq 0}$  **divergiert** für  $n \rightarrow \infty$ “.

- 2 Konvergenz gegen  $-\infty$  wird entsprechend definiert.
- 3 Für Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  wird das Konvergenzverhalten (bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ ) analog definiert (indem man die Folge  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$  betrachtet!).

## 4.9 Das Wachstumsverhalten von Funktionen

Die **Groß-O-Notation** wurde von **D. E. Knuth** in der Algorithmenanalyse eingeführt. Sie wurde ursprünglich von **Paul Bachmann** (1837–1920) entwickelt und von **Edmund Landau** (1877–1938) in seinen Arbeiten verbreitet.

### Definition 39 (Groß-O-Notation)

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  (für  $n \rightarrow \infty$ ) genau dann, wenn  $\exists c > 0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| \leq c \cdot g(n)]$$

„ $f$  wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht schneller als  $g$ “

- $f(n) \in o(g(n))$  (für  $n \rightarrow \infty$ ) genau dann, wenn  $\forall c > 0$   $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(\forall n \geq n_0) \quad [|f(n)| < c \cdot g(n)]$$

„ $f$  wächst echt langsamer als  $g$ “

- $f(n) \in \Omega(g(n))$  (für  $n \rightarrow \infty$ ) genau dann, wenn  $\exists c > 0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(\forall n \geq n_0) [|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0]$$

„ $f$  wächst bis auf einen konstanten Faktor nicht langsamer als  $g$ “

- $f(n) \in \omega(g(n))$  (für  $n \rightarrow \infty$ ) genau dann, wenn  $\forall c > 0$   $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$(\forall n \geq n_0) [|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0]$$

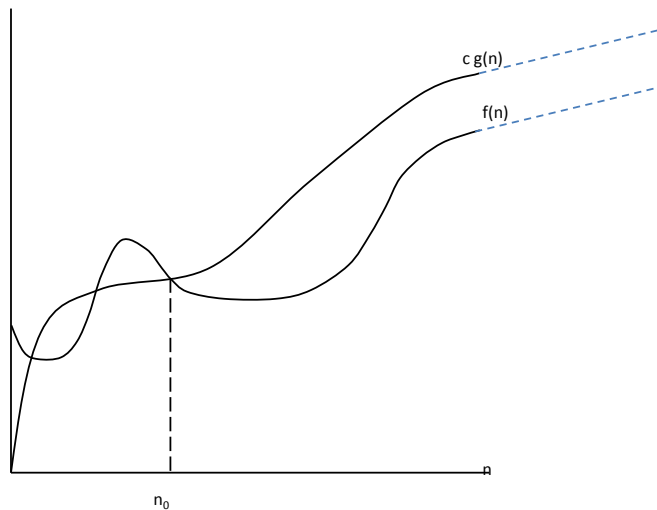
„ $f$  wächst echt schneller als  $g$ “

- $f(n) \in \Theta(g(n))$  (für  $n \rightarrow \infty$ ) genau dann, wenn

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \text{ und } f(n) \in \Omega(g(n))$$

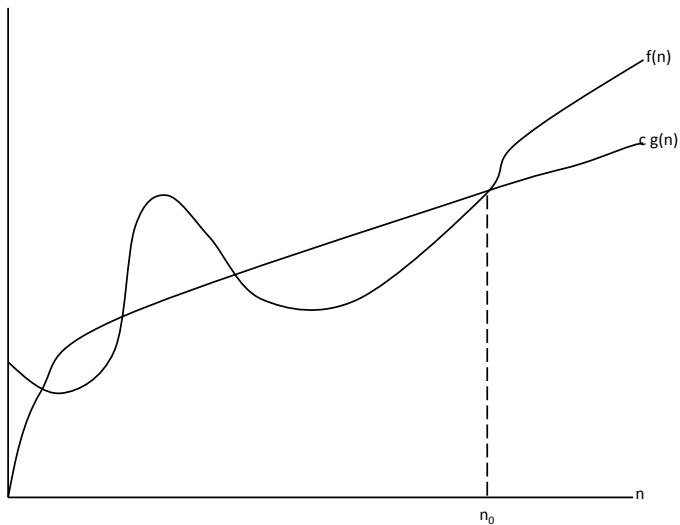
„ $f$  wächst (bis auf konstante Faktoren) genauso schnell wie  $g$ “

# Graphische Darstellung von $\mathcal{O}$

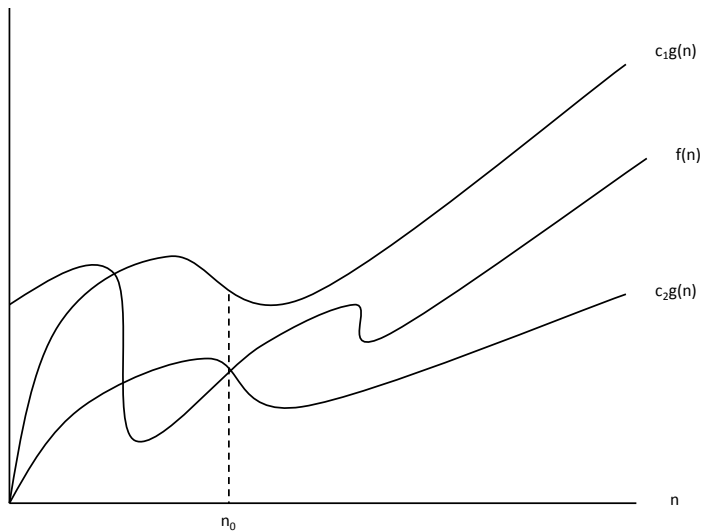




# Graphische Darstellung von $\omega$



# Graphische Darstellung von $\Theta$



- $f(n) \in \Omega_\infty(g(n))$  genau dann, wenn  $\exists c > 0$ , so dass für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| \geq c \cdot g(n) \geq 0.$$

- $f(n) \in \omega_\infty(g(n))$  genau dann, wenn  $\forall c > 0 \exists$  unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$|f(n)| > c \cdot g(n) \geq 0.$$

## Bemerkungen:

- 1 Man schreibt oft, aber **logisch unsauber**  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ .
- 2 Oft werden nur Funktionen  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  betrachtet (oder  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ ); dann sind die Absolutbeträge überflüssig.
- 3 Manchmal werden auch Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oder das Verhalten für  $x \rightarrow a$  betrachtet.
- 4 **Achtung:** Die Notation für  $\Omega$  und  $\Omega_\infty$  ist in der Literatur nicht eindeutig; im Zweifelsfall muss auf die jeweilige Definition geachtet werden!

# Rechenzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße

Problemgröße	Zeitbedarf					
	$\log n$	$n$	$n \log n$	$n^2$	$2^n$	$n!$
10	$3 \times 10^{-9}$ s	$10^{-8}$ s	$3 \times 10^{-8}$ s	$10^{-7}$ s	$10^{-6}$ s	$3 \times 10^{-3}$ s
$10^2$	$7 \times 10^{-9}$ s	$10^{-7}$ s	$7 \times 10^{-7}$ s	$10^{-5}$ s	$4 \times 10^{13}$ yr	*
$10^3$	$1,0 \times 10^{-8}$ s	$10^{-6}$ s	$1 \times 10^{-5}$ s	$10^{-3}$ s	*	*
$10^4$	$1,3 \times 10^{-8}$ s	$10^{-5}$ s	$1 \times 10^{-4}$ s	$10^{-1}$ s	*	*
$10^5$	$1,7 \times 10^{-8}$ s	$10^{-4}$ s	$2 \times 10^{-3}$ s	10 s	*	*
$10^6$	$2 \times 10^{-8}$ s	$10^{-3}$ s	$2 \times 10^{-2}$ s	17 min	*	*

Annahme: eine Operation dauert  $10^{-9}$  Sekunden,  $\log n = \log_2 n$

# Bezeichnung von Wachstums-Größenordnungen

$o(1)$	konvergiert gegen 0
$O(1)$	beschränkt durch Konstante
$\mathcal{O}(\log n)$	logarithmische Funktion
$\mathcal{O}(\log^k n)$	polylogarithmische Funktion
$O(n)$	linear beschränkte Funktion
$\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{O}(n^k)$	polynomiell beschränkte Funktion
$\bigcup_{c \geq 0} \Omega(2^{cn})$	(mindestens) exponentielle Funktion

## Beispiel 40

Behauptung:  $n! \in O(n^n)$

Beweis:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \leq 1 \cdot n^n]$$



## Beispiel 41

Behauptung:  $\log n! \in O(n \log n)$

Beweis:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [\log n! = \log n + \log(n-1) + \dots + \log 1 < 1 \cdot n \cdot \log n]$$

