Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Tobias Lieber

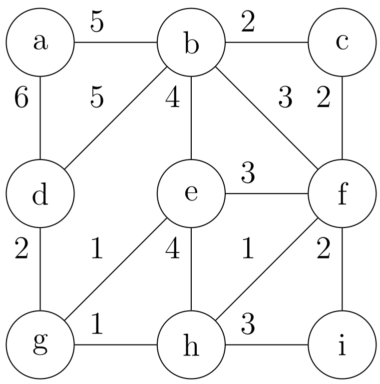
Wintersemester 2010/11
Übungsblatt 11
25. Januar 2011

Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabetermin: 1. Februar 2011 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei der folgende gewichtete Graph $G = (V, E)$:



Führen Sie den Algorithmus von Prim auf G mit Start im Knoten a aus. Haben Sie in einem Schritt mehrere Möglichkeiten, einen Knoten zu wählen, dann verwenden Sie den Knoten, der in der *lexikographischen Ordnung* vor allen anderen steht.
Geben Sie den konstruierten minimalen Spannbaum sowie die Reihenfolge, in der die Knoten der Priority Queue entnommen werden, an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

In dieser Aufgabe soll ein Lemma für die Konstruktionsalgorithmen von minimalen Spannbäumen (engl. minimal spanning tree, MST) gezeigt werden. Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$, eine Gewichtsfunktion $g : E \to \mathbb{R}$ sowie eine disjunkte Zerlegung von V in $V_1, V_2, ..., V_k$. Weiterhin sei jeweils $T_i = (V_i, E_i)$ ein minimaler Spannbaum für den durch V_i induzierten Teilgraphen.

a) Für ein i, alle Kanten $e \in E_i$ und alle Kanten e' zwischen V_i und $V \backslash V_i$ gelte: $g(e) < g(e')$. Sei b die (eindeutig bestimmte) leichteste Kante von V_i nach $V \backslash V_i$. Zeigen Sie, dass b in jedem MST von G enthalten ist und dass es einen MST von G gibt, der $E_i \cup \{b\}$ enthält.

b) Für alle Kanten $e \in E_i$ und alle Kanten $e' \in E$ zwischen V_i und $V \backslash V_i$ gelte: $g(e) \leq g(e')$. Sei b *eine* leichteste Kante von V_i nach $V \backslash V_i$. Zeigen Sie, dass es einen MST von G gibt, der $E_i \cup \{b\}$ enthält.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, einfacher, zusammenhängender Graph mit $|V| \leq |E|$ und einer Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$.

a) Sei T ein minimaler Spannbaum von G. Zeigen Sie, dass es Kanten $e \in T$ und $f \notin T$ gibt, so dass $(T \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ ein zweitbester minimaler Spannbaum von G ist.

b) Beschreiben Sie einen effizienten Algorithmus, der einen zweitbesten minimalen Spannbaum von G berechnet.

Hinweis: Ein Spannbaum ist zweitbester minimaler Spannbaum, falls er, ordnet man alle Spannbäume gemäß ihres Gewichts schwach aufsteigend an, in dieser Ordnung an zweiter Stelle stehen könnte. Es ist also möglich, dass er das gleiche Gewicht wie ein minimaler Spannbaum hat.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Ein *d-Heap* ist definiert als ein vollständiger d-ärer Baum, der die Heapbedingung erfüllt. Beschreiben Sie eine Implementierung von d-Heaps, die die INSERT-Operation in Zeit $O(\log_d n)$, die FINDMIN-Operation in konstanter und die DELETE-Operation in Zeit $O(d \cdot \log_d n)$ ermöglicht.

Hinweis: In einem vollständigen d-ären Baum hat jeder Knoten (mit höchstens einer Ausnahme) genau d Kinder, wobei die Knoten Ebene für Ebene von links nach rechts eingefügt werden. D.h. nur der innere Knoten, an dem zuletzt Kinder angefügt werden, darf weniger als d Kinder besitzen.