Satz 324

Sei M *wie oben. Dann gibt es für ein geeignetes* k *Konstanten* $c_i > 0$ *und Permutationsmatrizen* P_i*,* $i = 1, \ldots, k$*, so dass gilt*

$$M = \sum_{i=1}^{k} c_i P_i \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i = r\ .$$

7.2 Konstruktion optimaler Matchings

Satz 325

Ein Matching M ist genau dann Maximum, wenn es dazu keinen augmentierenden Pfad gibt.

Beweis:

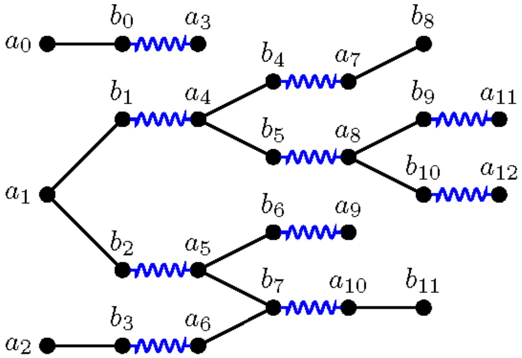
„$\Rightarrow$“ Offensichtlich.

„$\Leftarrow$“ Sei M ein Matching, zu dem es keinen augmentierenden Pfad gibt. Annahme, M sei kein Maximum Matching, es existiere ein Maximum Matching M'. Betrachte nun $M \Delta M'$. Die Zusammenhangskomponenten dieses Graphen sind alternierende Pfade und Kreise gerader Länge. Da $|M'| > |M|$ gilt, muss es einen alternierenden Pfad mit ungerader Länge geben, der mit Kanten aus M' beginnt und endet. Dies ist aber ein *augmentierender* Pfad.

□

Der Algorithmus zur Konstruktion optimaler Matchings ist eine parallele (simultane) alternierende Breitensuche.

Beispiel 326 (Konstruktion im bipartiten Graph)



Ergebnisse und Erweiterungen:

	bipartit	allgemein
ungewichtet	$O(\sqrt{\lvert V\rvert} \cdot \lvert E\rvert)$	$O(\sqrt{\lvert V\rvert} \cdot \lvert E\rvert)$
gewichtet	$O(\lvert V\rvert \cdot (\lvert E\rvert + \lvert V\rvert \cdot \log(\lvert V\rvert)))$	$O(\lvert V\rvert \cdot \lvert E\rvert \cdot \log(\lvert V\rvert))$

Siehe auch:
Zvi Galil: Efficient algorithms for finding maximum matchings in graphs, ACM Computing Surveys <u>18</u> (1986), pp. 23–38

7.3 Reguläre bipartite Graphen

Lemma 327

Sei $G = (U, V, E)$ ein k-regulärer bipartiter Graph ($k \in \mathbb{N}$). Dann hat G ein perfektes Matching.

Beweis:

Sei $A \subseteq U$ und $B = N(A) \subseteq V$. Dann ist $|A| \leq |B|$, da ja alle von A ausgehenden Kanten in B enden und, falls $|B| < |A|$, es in B damit einen Knoten mit Grad $> k$ geben müsste. $\square$

Korollar 328

Sei $G = (U, V, E)$ ein k-regulärer bipartiter Graph ($k \in \mathbb{N}$). Dann lässt sich E als disjunkte Vereinigung von k perfekten Matchings darstellen.

7.4 Transversalen

Definition 329

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph, M ein Matching in G, und $A \subseteq U$ die in M gematchte Teilmenge der Knotenmenge U. Dann heißt A eine Transversale in G.

Satz 330

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph, $\mathcal{T} \subseteq 2^U$ die Menge der Transversalen in G. Dann ist $(U, \mathcal{T})$ ein Matroid.

Beweis:

Die ersten beiden Bedingungen für ein Matroid sind klarerweise erfüllt:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$
2. $B \subset A, A \in \mathcal{T} \Rightarrow B \in \mathcal{T}$

Beweis (Forts.):

Seien nun A und A' Transversalen mit den zugehörigen Matchings M und M', und sei $|A'| = |A| + 1$, also auch $|M'| = |M| + 1$. Betrachte $M' \Delta M$.
Dann muss $M' \Delta M$ (mindestens) einen Pfad ungerader Länge enthalten, der mit einer Kante in M' beginnt und mit einer Kante in M' endet (und dazwischen abwechselnd Kanten in M bzw. M' enthält). Dieser Pfad ist ein augmentierender Pfad bzgl. M, und einer der beiden Endpunkte liegt in $A' \setminus A$, kann also zu A hinzugenommen werden. $\square$

Anwendung: gewichtetes Zuweisungsproblem, Variante 1

n Nutzer wollen jeweils auf eine aus einer nutzerspezifischen Teilmenge von insgesamt m Ressourcen zugreifen. Jede Ressource kann aber nur von höchstens einem Nutzer in Anspruch genommen werden. Der Wert einer Zuweisung von Ressourcen zu (interessierten) Nutzern ergibt sich als die Summe

$$\sum_{i \in A} w_i \ ,$$

wobei die Zuweisung einem Matching in dem durch Nutzer, Ressourcen und Zugriffswünsche gegebenen Graphen entspricht, $w_i \in \mathbb{R}^+$ ein Gewicht für jeden Nutzer $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist, und A die durch die Zuweisung (das Matching) bedachte Teilmenge der Nutzer ist.

7.5 Gewichtetes Matching in bipartiten Graphen

Wir betrachten nun eine zweite Variante eines Zuweisungsproblems, das durch bipartite Graphen $G = (U, V, E)$ mit einer Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+$ gegeben ist. Das Gewicht eines Matchings $M \subseteq E$ ist dann

$$\sum_{e \in M} w(e) \,.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $|U| = |V|$ $(= n)$ und G vollständig bipartit (also $G = K_{n,n}$) ist, indem wir zunächst die kleinere der beiden Mengen U und V mit zusätzlichen Knoten auffüllen und dann die fehlenden Kanten durch Kanten mit Gewicht 0 ersetzen.

Damit suchen wir in G *optimale perfekte* Matchings. Wir können das Problem, ein perfektes Matching maximalen Gewichts zu finden, reduzieren auf das Problem, ein perfektes Matching minimalen Gewichts zu bestimmen, indem wir jedes Gewicht $w(e)$ durch

$$\max_{e \in E} w(e) \; - \; w(e)$$

ersetzen.

Wir nehmen daher an, dass wir o.B.d.A. ein perfektes Matching minimalen Gewichts in (G, w) suchen.

Für die folgende Diskussion nehmen wir zur Vereinfachung weiter an, dass alle Gewichte $\in \mathbb{N}_0$ sind.

Sei

$$W = \left(w_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

die zu (G, w) gehörige Gewichtsmatrix, und sei

$$P = \left(p_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

eine Permutationsmatrix (d.h., jede Zeile und jede Spalte von P enthält genau eine 1 und ansonsten nur Einträge 0).

Die Permutationsmatrix P entspricht einem perfekten Matching M in G mit Gewicht

$$\sum_{i,j} p_{ij} w_{ij} \;.$$

Beobachtung:
Wenn wir von jedem Element einer Zeile (oder Spalte) in W einen festen Betrag p subtrahieren, verringert sich das Gewicht eines jeden perfekten Matchings M um diesen Betrag p, die relative Ordnung (nach Gewicht) unter den perfekten Matchings bleibt bestehen, insbesondere gehen optimale Matchings wieder in optimale Matchings über.

Wir führen nun solche Zeilen- und Spaltenumformungen durch, um eine Diagonale mit möglichst vielen Einträgen $= 0$ zu erhalten.

Beispiel 331

Sei

$$W = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 & 11 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 13 & 11 \\ 9 & 10 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Nachdem wir von jeder Zeile das minimale Gewicht subtrahieren, erhalten wir

$$W' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.)

$$W' \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nachdem wir von jeder Spalte das minimale Gewicht subtrahieren, erhalten wir

$$W'' \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.)

Diese Matrix enthält eine Diagonale der Größe 3 mit Einträgen $= 0$*:*

$$W'' = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 4 & 5 \\ 2 & 3 & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Aus Satz 321 folgt, dass die maximale Länge einer 0-Diagonale gleich der minimalen Anzahl von Zeilen und Spalten ist, die alle 0en bedecken.
Falls wir noch keine 0-Diagonale der Länge n haben, iterieren wir folgenden Algorithmus:

1. finde eine minimale Anzahl von e Zeilen und f Spalten ($e + f < n$), die zusammen alle Einträge $= 0$ enthalten;
2. sei w das Minimum der nicht überdeckten Elemente;
3. subtrahiere w von den $n - e$ nicht überdeckten Zeilen;
4. addiere w zu den f überdeckten Spalten.

Die Gewichte ändern sich also wie folgt:

1. um $-w$, falls (i, j) nicht überdeckt ist;
2. um 0, falls (i, j) von einer Zeile *oder* Spalte überdeckt ist, aber nicht beides;
3. um $+w$, falls (i, j) von einer Zeile *und* einer Spalte überdeckt ist.

Insbesondere sind die resultierenden Gewichte wieder ≥ 0.
Die Anzahl der doppelt (von Zeilen *und* Spalten) überdeckten Positionen ist $e \cdot f$, die Anzahl der nicht überdeckten Positionen ist

$$n^2 - n(e + f) + ef \; .$$

Der resultierende Gewichtsunterschied ist daher

$$\begin{aligned}\Delta w &= (ef)w - (n^2 - n(e + f) + ef)w \\ &= (n(e + f) - n^2)w < 0\end{aligned}$$

Damit muss unsere Iteration enden und wir finden eine 0-Diagonale der Länge n, entsprechend einer optimalen Zuordnung.

Beispiel (Forts.)

In unserem Beispiel ergibt sich

$$W'' = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{0} & \boxed{2} \\ 3 & \boxed{0} & 2 & 2 \\ 1 & \boxed{0} & 4 & 5 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Der Algorithmus bestimmt $w = 1$:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & \boxed{0} & 2 \\ 2 & \boxed{0} & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Beispiel (Forts.)

In dem durch die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 9 & 11 & \boxed{12} & 11 \\ 6 & \boxed{3} & 8 & 5 \\ \boxed{7} & 6 & 13 & 11 \\ 9 & 10 & 10 & \boxed{7} \end{pmatrix}$$

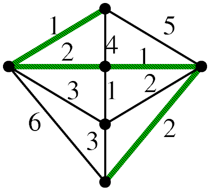
gegebenen bipartiten Graphen hat also das durch die markierten Kanten gegebene perfekte Matching minimales Gewicht.

Bemerkung: Bei geeigneter Implementierung ist die Laufzeit des Algorithmus $O(n^3)$.

7.6 Das Problem des chinesischen Postboten

Gegeben ist ein zusammenhängender, gewichteter Multigraph $G = (V, E, w)$.
Gesucht ist ein Kreis minimalen Gewichts, der jede Kante mindestens einmal enthält.

Beispiel 332 (In der optimalen Lösung werden die dickeren grünen Kanten zweimal verwendet)



Algorithmus: Sei U die Menge der Knoten ungeraden Grades, $|U| = 2k$.

1. Bestimme $\mathrm{d}(u, v)$ für alle $u, v \in U$.
2. Bestimme auf dem K_{2k} mit Kantengewichtung $w(\{u, v\}) = \mathrm{d}(u, v)$ ein perfektes Matching M minimalen Gewichts.
3. Füge die den Kanten in M entsprechenden kürzesten Pfade in G ein und bestimme im resultierenden Graphen einen Eulerkreis. Dieser ist eine Lösung.