

SS 2011

Zentralübung
Diskrete Strukturen
(zur Vorlesung Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/ds/uebung/>

23. August 2011

ZÜ I

Übersicht:

1. Übungsbetrieb
2. Ziele der Zentralübung
3. Brückenschlag zu verwandten Vorlesungen
4. Metasprachliche Konzepte
5. Vorbereitung auf Tutorübungen Blatt 2

1. Übungsbetrieb

1.1 Organisation der Zentralübung

- Zeit: Di 14.00–15:30
Ort: Chemie HS 21010 (Hans-Fischer-Hörsaal)
- Webseite:
<http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/ds/uebung/>
- Kontakt Dr. W. Meixner:
 - El. Post: meixner@in.tum.de
 - Telefon: 089 289 17713
 - Raum: MI 03.09.040
 - Sprechstunde: Di 12 - 13 Uhr n.V.,
und im Anschluss an die Zentralübung.
- Material:
 - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
 - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie

1.2 Aufgabenstruktur der Übungen

Die **Übungsblätter** bestehen aus Aufgaben für Vorbereitung (VA), Aufgaben für Tutorübung (TA) und Hausaufgaben (HA) mit folgender

Zielsetzung:

VA: Vorbereitung der Tutorübungen (inhaltlich parallel zur Vorl.).

TA: Stoff der Gruppenarbeit in der Tutorübung,

HA: Wiederholung und Lernkontrolle (Prüfungstil).

Bearbeitung:

VA für Eigenstudium und Besprechung in der Zentralübung (ZÜ).

HA werden nicht besprochen, aber korrigiert.

Musterlösungen:

Zu allen Aufgaben der Übungsblätter und Klausur wird es Musterlösungen auf der Übungswebseite geben.

1.3 Persönliche Kommunikation

- Rückkopplung zur Übungsleitung:
Dr. W. Meixner,
El. Post: meixner@in.tum.de,
Büro: MI 03.09.040,
Sprechstunde: Di 12 - 13 Uhr n.V., und nach ZÜ.
- Mitarbeit bei Musterlösungen
- Kummerkasten: DS-Briefkästen und El. Post

2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und allgemeine **didaktische Ziele**.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung**
für Tutor- bzw. Hausaufgaben der Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation:**
 - Rückkopplung zu Übungsleitung und Tutoren
 - Antworten auf Kummerkasten: Briefkästen und El. Post

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Vertiefung der **informellen Metasprache**

3. Brückenschlag zu verwandten Vorlesungen

3.1

Mathematisch–Theoretische Informatik in den ersten 4 Semestern:

- Diskrete Strukturen (DS)
- Informatik 1 (Info1)
- Lineare Algebra (LA)
- Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen (GAD)
- Analysis (A)
- Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (DWT)
- Theoretische Informatik (Theo)

3.2

Spezielle Beziehungen von **DS** zu

- **Info1:** Algorithmenbegriff, Beweisverfahren, Aussagenlogik, Prädikatenlogik, Mengenlehre, Bäume, Rekursion und Induktion.
- **LA:** Matrizen, Matrixpotenzen, Vektorräume, Algebren, Körpertheorie.
- **GAD:** Bäume, Graphen, Zählverfahren, Landau Symbole.
- **A:** Reelle und komplexe Zahlen, Grenzwerte, Potenzreihen, Polynome.
- **DWT:** Zählmaße und Zählprobleme, Kombinatorik.
- **Theo:** Graphentheorie, Eigenschaften von Algorithmen, Rekursionstheorie, Komplexitätstheorie.

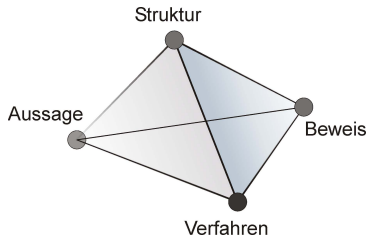
4. Grundlegende Metasprachliche Begriffe

4.1 Basisbegriffe der Informatik

Struktur — Aussage — Beweis — Verfahren

stehen wechselseitig in Beziehung:

Tetraeder der Basisbegriffe



Informelle Präzisierung:

- **Struktur:** (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) **Objekten**.
- **Verfahren:** (Art der) Zusammenfassung (einer Vielheit) von (abstrakten) **Vorgängen**.
- **Aussage:** Sprachliches Gebilde, für das es sinnvoll ist zu sagen, dass es **wahr oder falsch** ist. (*Aristoteles*)
- **Beweis:** Verfahren zur Bestimmung des Wahrheitswertes einer Aussage.

Die Begriffe 'Objekt' und 'Vorgang' bedingen sich gegenseitig. Jeder Vorgang führt zu einem Objekt als Ergebnis. Umgekehrt ist jedes Objekt das Ergebnis eines Vorgangs.

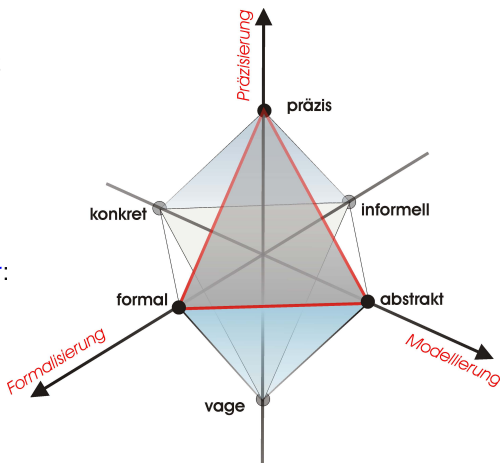
„Die mathematisch–theoretische Informatik kann nicht wie die Mathematik allein auf der Mengenlehre aufgebaut werden.“

4.2 Vertiefung der informellen Metasprache

Wissenschaftliche Schulung und Entwicklung vollzieht sich im Spannungsfeld folgender Begriffspaare:

- vage — präzise
- konkret — abstrakt
- informell — formal

Darstellung im Oktaeder:



- Durch „*Abstraktion*“ „erzeugen“ wir abstrakte (= von uns gedachte) *Inhalte* (Objekte, Vorgänge), die **nicht identisch** sind mit dem „konkret Gemeinten“!
(*Modellierung*)
- Wir *formalisieren* abstrakte Inhalte, indem wir sie durch *konkrete Zeichen(folgen)* „benennen“.
(*Formalisierung*)
- Wir *präzisieren* abstrakte Inhalte, indem wir *logische Konsequenzen* mit dem Gemeinten vergleichen, und dann die Modellierung adäquat ändern.
(*Präzisierung*)

Abstraktionen versus Phantasien:

*„Wer über einen gedachten Stein stolpert
und sich dabei den Arm bricht, der hat ein
Problem mit der*

Wahrnehmung der Wirklichkeit.“



5. Vorbereitung Blatt 2

5.1 VA 1

Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem
allgemeinen Venn-Diagramm für drei Mengen A , B und C
einerseits und andererseits
der Menge der Vollkonjunktionen für drei Aussagenvariablen
 p, q, r ?

Antwort:

Allgemeine Venn-Diagramme dreier Mengen A , B und C stellen **schematisch** zunächst alle möglichen Durchschnitte dieser drei Mengen dar.

(siehe dazu Blatt 1, insbesondere Turaufgabe 2.2 dort)

Zeichnerische Darstellungsmittel sind z. B. Kreise oder Quadrate.

Bei Zeichnung eines Kreises (oder Quadrats) gibt es grundsätzlich die Möglichkeit,

den **Innenbereich** und den **Außenbereich**

als Darstellung je einer Menge aufzufassen.

Mit **drei Kreisen** für A bzw. B bzw. C
kann man also deren Komplemente \bar{A} bzw. \bar{B} bzw. \bar{C} darstellen,
und mithin **alle Durchschnitte** der 6 Mengen $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$.

Die **leere Menge** wird als **Außenbereich des Universums**, d. h. der gesamten Zeichnungsebene, aufgefaßt.

Das **Universum** kann durch den **Durchschnitt von 0 Mengen** als Grenzfall des Durchschnitts von n Mengen dargestellt werden.

Frage:

Wie viele verschiedene Durchschnitte können dargestellt werden?

Einen Zusammenhang des Venn-Diagramms mit den **Vollkonjunktionen** über p , q und r kann man herstellen, indem man z. B. eine Zuordnung

$$p \mapsto A, q \mapsto B \text{ und } r \mapsto C$$

definiert und die

Konjunktion als Mengendurchschnitt

sowie die

Negation als Komplementbildung

interpretiert.

Dann entspricht jeder Vollkonjunktion über p , q und r genau eines der **kleinsten, nicht weiter unterteilten Gebiete** im Venn-Diagramm.

Dies sind jene Gebiete, die alle zusammen eine

Partitionierung des Universums

darstellen, d. h.

eine Aufteilung des Universums in disjunkte (Teil-)Mengen.

Bemerkung:

Es stellt sich die interessante weitergehende Frage, welche Aussage man den Aussagenvariablen, z. B. p , zuordnen könnte anstelle einer Menge, z. B. A ?

Dahinter steht die Frage, wie die Aussagenlogischen Formeln mit Mengen und Mengengesetzen zusammenhängen.

Die Antwort auf die letztgestellte Frage ist wie folgt:

Für jedes Element x eines Universums U und jede Teilmenge A von U gibt es die Aussage $x \in A$.

Und A ist dann nichts anderes als die Menge aller x , für die die Aussage $x \in A$ zutrifft:

$$A = \{x; x \in A\} \quad (\text{intensionale Mengendarstellung}).$$

5.2 VA 2

Eine der grundlegendsten Operationen der Analysis und Funktionentheorie ist die Bildung der **Potenz** p^q .

Man nennt die daraus abgeleitete Funktion x^a **Potenzfunktion**,
und die Funktion a^x **Exponentialfunktion**
mit dem Spezialfall e^x .

Die **Umkehrung** von a^x führt auf die **Logarithmusfunktion** $\log_a x$.

Allgemein wird der Logarithmus einer Zahl x zur Basis b mit

$$\log_b x$$

bezeichnet. Soll eine Aussage für beliebige positive Basen gelten, so schreibt man häufig

$$\log x .$$

Die Formel für die Umrechnung verschiedener Basen lautet dann

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b} .$$

Für $b = e$ wird $\ln x$,
für $b = 10$ wird $\lg x$,
für $b = 2$ wird $\text{ld } x$
geschrieben.

Im Folgenden setzen wir die **grundlegenden Eigenschaften** der Logarithmus- bzw. Exponentialfunktion als bekannt voraus, also z. B.

$$0 < e^{x+y} = e^x \cdot e^y ,$$

$$e^0 = 1 < e^z ,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}^+$.

Insbesondere setzen wir die **Stetigkeit** der Funktionen voraus.

- ① Geben Sie einen **direkten Beweis** für die folgenden Gleichungen:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad n^{\ln \ln n} = (\ln n)^{\ln n},$$

wobei

$$0 < a, 0 < b, 0 < c \text{ bzw. } 0 < n$$

vorausgesetzt wird.

Die Beweise kann man durch **Logarithmieren** führen.

Zum Beweis einer Gleichung

$$x = y$$

für **positive** x und y beweist man zunächst

$$\log_d x = \log_d y,$$

weil daraus wegen $d^{\log_d z} = z$ für $z = x$ und $z = y$,
sofort $x = y$ folgt.

Wir zeigen also

$$\log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a} \quad \text{bzw.} \quad \ln n^{\ln \ln n} = \ln (\ln n)^{\ln n}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\log_b a^{\log_b c} &= (\log_b c) \cdot (\log_b a) \\ &= (\log_b a) \cdot (\log_b c) \\ &= \log_b c^{\log_b a}\end{aligned}\tag{1}$$

und

$$\begin{aligned}\ln n^{\ln \ln n} &= (\ln \ln n) \cdot (\ln n) \\ &= (\ln n) \cdot \ln (\ln n) \\ &= \ln (\ln n)^{\ln n}.\end{aligned}\tag{2}$$

5.3 VA 3

- 1 Geben Sie eine aussagenlogische Formel F an, so dass F und $\neg F$ erfüllbar ist!

Antwort:

Sei $F = (x \equiv y)$.

Dann ist die Formel F unter der Belegung $x \mapsto 1, y \mapsto 1$ wahr, denn es gilt $(1 \equiv 1) = 1$ (siehe Tabelle in der Vorlesung).

Also ist F erfüllbar.

Die Formel $\neg F$ ist unter der Belegung $x \mapsto 1, y \mapsto 0$ wahr, denn es gilt $(1 \equiv 0) = 0$ und deshalb $\neg(1 \equiv 0) = 1$.

Also ist $\neg F$ erfüllbar.

2 Geben Sie eine nicht erfüllbare Formel an!

Antwort:

$$F = \text{false} .$$

oder

$$F = x \wedge \neg x .$$

- 3 Zeigen Sie, dass die aussagenlogischen Formeln $(p \Rightarrow q)$ und $(\neg q \Rightarrow \neg p)$ semantisch äquivalent sind.

Antwort:

Siehe nachfolgende Aufgabe.

5.4 VA 4

Bestimmen Sie die Semantik des folgenden aussagenlogischen Ausdrucks in den Variablen x, y, z als Wahrheits(wert)tabelle:

$$((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y).$$

Wir berechnen in mehreren Spalten die Zwischenergebnisse. Die Eingabeparameter sollten aus Gründen der besseren Lesbarkeit stets lexikographisch sortiert werden.

Sei $F = ((x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)) \vee (z \Rightarrow y)$.

x	y	z	$x \Rightarrow y$	$\neg(x \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow z)$	$z \Rightarrow y$	F
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Man kann die Zwischenergebnisse auch direkt in eine Spalte unter den Operator schreiben und dazu nur die Formel F einmalig in die Kopfzeile der Tabelle schreiben.

Allerdings leidet dann die Übersichtlichkeit.

5.5 Induktionsbeweis

Mit einem Induktionsbeweis beweist man den Wahrheitswert einer aufgezählten Menge von Aussagen

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

durch eine Aufzählung der Beweise B_i für die Aussagen A_i

$$B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$$

Man beweist dabei die erste der Aussagen, d.h. A_1 , und eine Folgerung $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ für beliebiges $n \geq 1$.

Daraus ergibt sich dann eine Aufzählung der Beweise B_i .

Man beachte:

Die Variable n bedeutet lediglich den Index in der Aufzählung der Aussagen A_n bzw. Beweise B_n .

Selbstverständlich beginnt der Index einer Aufzählung bei 1 und ist **aufsteigend unendlich**.

Die Aussagen A_n haben stets die Form

Es gilt $P(n)$.

Dabei ist $P(n)$ ein Prädikat, das sich auf den Index n bezieht.

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen.

Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n)] \quad (1)$$

mit **vollständiger Induktion** zu beweisen, heißt,

anstatt (1) die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]. \quad (2)$$

Bemerkung:

Das Prädikat $P(n)$ ist nicht identisch mit der Aussage, die man beweisen will. Die Frage der Anpassung des Schemas an z.B. absteigende Folgen ganzer Zahlen oder den Induktionsanfang stellt sich nicht.

Die Anpassung geschieht stets durch

Wahl eines geeigneten Prädikats.

Beim **Beweis der Formel (2)** geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:

...

Induktionsschritt: Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$.

Der **Induktionsschritt** wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Dann gilt $P(n + 1)$:

...

Soweit das **Schema des Induktionsbeweises**.

VA 5

Zeigen Sie mit **vollständiger Induktion**

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$
die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1 + x)^m .$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an
und führen Sie den Induktionsbeweis
für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$
nach dem **angegebenen Schema** durch.

Lösung:

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$.

Wir definieren das Prädikat $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ so, dass $P(n)$ genau dann wahr ist, wenn $1 + (n - 1)x \leq (1 + x)^{n-1}$ gilt, i.Z.

$$P(n) \quad :\iff \quad 1 + (n - 1)x \leq (1 + x)^{n-1}.$$

Dann haben wir zu zeigen

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n)].$$

Induktionsanfang : Es gilt $P(1)$:
 $P(1)$ bedeutet
 $1 + 0 \cdot x \leq (1 + x)^0$, d. h. $1 \leq 1$.
Also gilt $P(1)$.

Induktionsschritt : Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N}) [P(n) \Rightarrow P(n + 1)]$.

Der **Induktionsschritt** wird gezeigt durch:

Induktionsannahme : Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss : Es gilt $P(n + 1)$:

$$\begin{aligned}(1 + x)^n &= (1 + x)^{n-1}(1 + x) \\ &\geq (1 + (n-1)x)(1 + x) \quad \text{l.A. } P(n) \\ &= 1 + (n-1)x + x + (n-1)x^2 \\ &\geq 1 + nx. \quad \text{w.z.b.w.}\end{aligned}$$

5.6 Grenzwert und Wachstum von Funktionen

VA 6.1

- 1 Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Limes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Lösung:

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$.

Dann haben wir also für die Folge $(f(n))_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$

und $a = 0$ zu zeigen

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_\varepsilon) \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right].$$

Die hier anzuwendende **Beweistechnik** ist außerordentlich wichtig.

Sie besteht in der

schrittweisen Erfüllung des obigen prädikatenlogischen Ausdrucks von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall \varepsilon > 0 \left[\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_\varepsilon \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right] \right] \right] .$$

Als Erstes nehmen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ an.

Für dieses $\varepsilon > 0$ ist folgendes nachzuweisen.

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_\varepsilon \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right] \right].$$

Existenzbeweise werden häufig konstruktiv geführt.

Wir konstruieren hier ein geeignetes n_ε wie folgt:

$$n_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 17.$$

$\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ bedeutet die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Nun müssen wir **zeigen**, dass gilt

$$\forall n \geq n_\varepsilon \left[\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon \right].$$

Wir nehmen ein **beliebiges** n mit $n \geq n_\varepsilon$ an und haben zu **zeigen**:

$$\left| \frac{1}{n+1} - a \right| < \varepsilon.$$

Wegen $n \geq n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 17$ gilt $n > \frac{1}{\varepsilon}$, mithin $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Mit $a = 0$ folgt

$$\left| \frac{1}{n+1} - a \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Damit sind wir mit dem **Beweis fertig**.

VA 6.2

Im Folgenden bezeichnet 1 die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

- 2 Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:

$$\frac{1}{n+1} \in o(1).$$

Lösung:

Sei $f(n) = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann haben wir zu zeigen

$$(\forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_c) \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right].$$

Wieder erfüllen wir

schrittweise den obigen prädikatenlogischen Ausdruck von „links nach rechts“ gemäß der Klammerung

$$\forall c > 0 \left[\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] \right] \right].$$

Als Erstes nehmen wir ein beliebiges $c > 0$ an.

Für dieses $c > 0$ ist Folgendes nachzuweisen.

$$\exists n_c \in \mathbb{N}_0 \left[\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right] \right] .$$

Den Existenzbeweis führen wir wieder konstruktiv.

Wir konstruieren ein geeignetes n_c wie folgt:

$$n_c := \left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil + 17.$$

Nun müssen wir **zeigen**, dass gilt

$$\forall n \geq n_c \left[\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1 \right].$$

Wir nehmen ein **beliebiges** n mit $n \geq n_c$ an und haben zu **zeigen**:

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < c \cdot 1.$$

Wegen $n \geq n_c = \lceil \frac{1}{c} \rceil + 17$ gilt $n > \frac{1}{c}$, mithin $\frac{1}{n} < c$.

Es folgt

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < c \cdot 1.$$

W.z.b.w.

VA 6.3

- 3 Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \iff f(n) \in o(1).$$

Lösung:

Tatsächlich müssen wir im Wesentlichen nur einige Bezeichnungen ersetzen.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 &\iff (\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_\varepsilon [|f(n) - 0| < \varepsilon]) \\ &\iff (\forall c > 0 \exists n_c \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq n_c [|f(n)| < c \cdot 1]) \\ &\iff f(n) \in o(1).\end{aligned}$$

Bemerkung:

Obiger Beweis ist ein Beispiel für **äquivalente Umformung** anstelle einer schrittweisen Auflösung der prädikatenlogischen Formel.