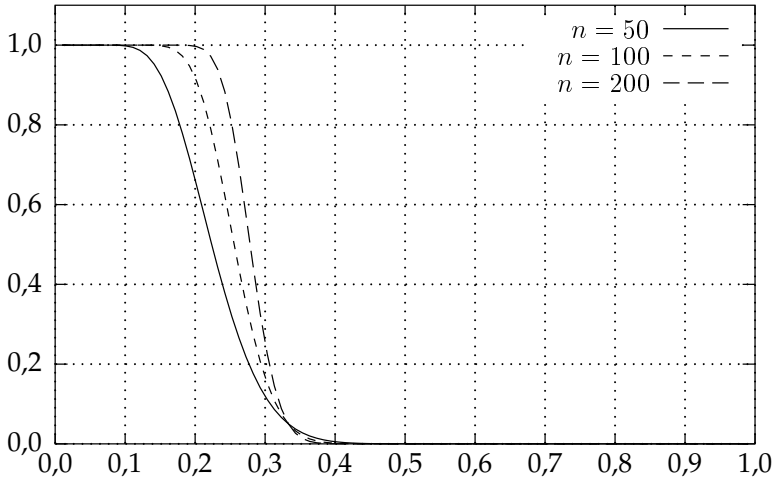


Die so genannte **Gütefunktion**  $g$  gibt allgemein die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Test die Nullhypothese verwirft. Für unser hier entworfenes Testverfahren gilt

$$g(n, p) = \Pr_p[T \in K] = \Pr_p[T \leq k] \approx \Phi \left( \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right).$$



Gütefunktion  $g(n, p)$  für verschiedene Werte von  $n$

Man erkennt deutlich, dass für alle  $n$  der Wert von  $k = k(n)$  genau so gewählt wurde, dass  $g(n, 1/3) = 0,05$  gilt. Dies wird durch den in Gleichung 8 angegebenen Ausdruck erreicht.

Für Werte von  $p$  größer als  $1/3$  wird  $H_0 : p \geq 1/3$  mit hoher Wahrscheinlichkeit angenommen, während für Werte deutlich unter  $1/3$  die Hypothese  $H_0$  ziemlich sicher abgelehnt wird.

Ferner ist auffällig, dass  $g$  für größere Werte von  $n$  schneller von Eins auf Null fällt. Daran erkennt man, dass durch den Test die Fälle „ $H_0$  gilt“ und „ $H_0$  gilt nicht“ umso besser unterschieden werden können, je mehr Stichproben durchgeführt werden. Für Werte von  $p$ , bei denen  $g(n, p)$  weder nahe bei Eins noch nahe bei Null liegt, kann der Test nicht sicher entscheiden, ob die Nullhypothese abzulehnen ist.

## 4.2 Praktische Anwendung statistischer Tests

Das im vorhergehenden Abschnitt konstruierte Testverfahren taucht in der Literatur unter dem Namen **approximativer Binomialtest** auf.

Die folgende Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Eckdaten dieses Tests.

### Tabelle: Approximativer Binomialtest

#### Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $\Pr[X_i = 1] = p$  und  $\Pr[X_i = 0] = 1 - p$ , wobei  $p$  unbekannt sei.  $n$  sei hinreichend groß, so dass die Approximation aus Korollar 116 brauchbare Ergebnisse liefert.

#### Hypothesen:

- a)  $H_0 : p = p_0$  gegen  $H_1 : p \neq p_0$ ,
- b)  $H_0 : p \geq p_0$  gegen  $H_1 : p < p_0$ ,
- c)  $H_0 : p \leq p_0$  gegen  $H_1 : p > p_0$ .

#### Testgröße:

$$Z := \frac{h - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}},$$

wobei  $h := X_1 + \dots + X_n$  die Häufigkeit bezeichnet, mit der die Ereignisse  $X_i = 1$  aufgetreten sind.

#### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|Z| > z_{1-\alpha/2}$ ,
- b)  $Z < z_\alpha$ ,
- c)  $Z > z_{1-\alpha}$ .

## 4.3 Allgemeines Vorgehen bei statistischen Tests

1. **Schritt:** Formulierung von Annahmen. Ganz ohne Annahmen kommt man meist nicht aus. Übliche Annahmen betreffen meist die Verteilung der Stichprobenvariablen und deren Unabhängigkeit.
2. **Schritt:** Formulierung der Nullhypothese.
3. **Schritt:** Auswahl des Testverfahrens.
4. **Schritt:** Durchführung des Tests und Entscheidung.

## 4.4 Ausgewählte statistische Tests

### 4.4.1 Wie findet man das richtige Testverfahren?

Statistische Tests kann man nach mehreren Kriterien in Klassen einteilen.

- **Anzahl der beteiligten Zufallsgrößen**

Sollen zwei Zufallsgrößen mit potentiell unterschiedlichen Verteilungen verglichen werden, für die jeweils eine Stichprobe erzeugt wird (**Zwei-Stichproben-Test**), oder wird nur eine einzelne Zufallsgröße untersucht (**Ein-Stichproben-Test**)?

Bei der Fragestellung

*Beträgt die mittlere Zugriffszeit auf einen Datenbankserver im Mittel höchstens 10ms?*

hat man es mit einem Ein-Stichproben-Test zu tun, während die Untersuchung der Frage

*Hat Datenbankserver A eine kürzere mittlere Zugriffszeit als Datenbankserver B?*

auf einen Zwei-Stichproben-Test führt.



Bei mehreren beteiligten Zufallsgrößen wird zusätzlich unterschieden, ob aus voneinander unabhängigen Grundmengen Stichproben erhoben werden oder nicht. Beim vorigen Beispiel werden **unabhängige Messungen** vorgenommen, sofern die Server A und B getrennt voneinander arbeiten. Wenn man jedoch die Frage

*Läuft ein Datenbankserver auf einer Menge festgelegter Testanfragen mit Query-Optimierung schneller als ohne?*

untersucht, so spricht man von **verbundenen Messungen**.

Gelegentlich betrachtet man auch den Zusammenhang zwischen mehreren Zufallsgrößen. Beispielsweise könnte man sich für die Frage interessieren:

*Wie stark wächst der Zeitbedarf für eine Datenbankanfrage im Mittel mit der (syntaktischen) Länge der Anfrage, d. h. führen kompliziertere Formulierungen zu proportional längeren Laufzeiten?*

Mit solchen Fragenstellungen, bei denen ein funktionaler Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen ermittelt werden soll, beschäftigt sich die [Regressionsanalyse](#). Wenn überhaupt erst zu klären ist, ob ein solcher Zusammenhang besteht oder ob die Zufallsgrößen vielmehr unabhängig voneinander sind, so spricht man von [Zusammenhangsanalyse](#).

- **Formulierung der Nullhypothese**

Welche Größe dient zur Definition der Nullhypothese? Hierbei werden in erster Linie Tests unterschieden, die Aussagen über verschiedene so genannte **Lageparameter** treffen, wie z.B. den **Erwartungswert** oder die **Varianz** der zugrunde liegenden Verteilungen.

Im Zwei-Stichproben-Fall könnte man beispielsweise untersuchen, ob der Erwartungswert der Zufallsgröße  $A$  größer oder kleiner als bei Zufallsgröße  $B$  ist.

Gelegentlich wird zur Formulierung der Nullhypothese auch der so genannte **Median** betrachtet: Der Median einer Verteilung entspricht dem (kleinsten) Wert  $x$  mit  $F(x) = 1/2$ .

Neben solchen Tests auf Lageparameter gibt es z.B. auch Tests, die auf eine **vorgegebene Verteilung** oder auf ein Maß für die Abhängigkeit verschiedener Zufallsgrößen testen.

- **Annahmen über die Zufallsgrößen**

Was ist über die Verteilung der untersuchten Größe(n) bekannt? Bei entsprechenden Annahmen könnte es sich z.B. um die Art der Verteilung, den Erwartungswert oder die Varianz handeln.

## 4.4.2 Ein-Stichproben-Tests für Lageparameter

Beim approximativen Binomialtest wird ausgenutzt, dass die Binomialverteilung für große  $n$  nach dem Grenzwertsatz von de Moivre (Korollar 116) gegen die Normalverteilung konvergiert. Aus diesem Grund kann man diesen Test auch als Spezialfall eines allgemeineren Testverfahrens ansehen, nämlich des **Gaußtest**, der nun dargestellt wird.

## Tabelle: Gaußtest

### Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , wobei  $\sigma^2$  bekannt ist.  
Alternativ gelte  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ , und  $n$  sei groß genug.

### Hypothesen:

- a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ,
- b)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$ ,
- c)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

### Testgröße:

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}.$$

### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|Z| > z_{1-\alpha/2}$ ,
- b)  $Z < z_\alpha$ ,
- c)  $Z > z_{1-\alpha}$ .

Der Gaußtest hat den Nachteil, dass man die Varianz  $\sigma^2$  der beteiligten Zufallsgrößen kennen muss.

Wenn diese unbekannt ist, so liegt es nahe, die Varianz durch die Stichprobenvarianz  $S^2$  (siehe Definition 121) anzunähern. Dies führt auf den so genannten  $t$ -Test, der in der folgenden Übersicht dargestellt ist.

## Tabelle: *t*-Test

### Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .  
Alternativ gelte  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ , und  $n$  sei groß genug.

### Hypothesen:

- a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ,
- b)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$ ,
- c)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

### Testgröße:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}.$$

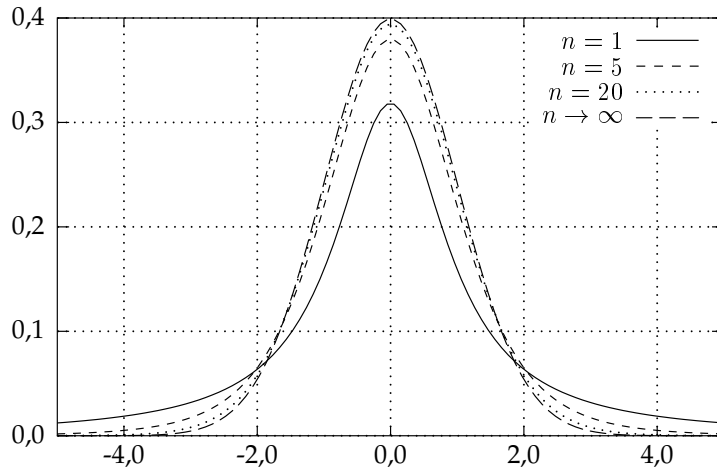
### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|T| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$ ,
- b)  $T < t_{n-1, \alpha}$ ,
- c)  $T > t_{n-1, 1-\alpha}$ .



Hierbei gibt  $t_{n-1,1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der  $t$ -Verteilung mit  $n - 1$  Freiheitsgraden an. Die  $t$ -Verteilung taucht manchmal auch unter dem Namen **Student-Verteilung** auf, da sie ursprünglich unter dem Pseudonym „Student“ publiziert wurde.

Wir gehen an dieser Stelle nicht darauf ein, wieso die Testgröße die  $t$ -Verteilung besitzt, sondern weisen nur darauf hin, dass die Dichte dieser Verteilung (eigentlich handelt es sich um eine ganze Familie von Verteilungen, da die Anzahl der Freiheitsgrade jeweils noch gewählt werden kann) der Dichte der Normalverteilung ähnelt. Für große  $n$  (Faustregel:  $n \geq 30$ ) liegen die beiden Dichten so genau übereinander, dass man in der Praxis die  $t$ -Verteilung durch die Normalverteilung annähert.



Dichte der  $t$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden

Als weitere Beispiele für gängige Ein-Stichproben-Tests zu Lageparametern seien der **Wilcoxon-Test** und der  $\chi^2$ -**Varianztest** genannt. Ersterer dient zum Testen von Hypothesen zum Median, während der zweite Test Hypothesen zur Varianz beinhaltet.

### 4.4.3 Zwei-Stichproben-Tests für Lageparameter

Bei Zwei-Stichproben-Tests wollen wir das Verhältnis von Lageparametern untersuchen. Besonders wichtig sind hierbei Tests zum Erwartungswert. Für zwei Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  könnten wir beispielsweise die Frage untersuchen, ob für die Erwartungswerte  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  gilt, dass  $\mu_X = \mu_Y$  ist.

## Tabelle: Zwei-Stichproben-t-Test

### Annahmen:

$X_1, \dots, X_m$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  seien unabhängig und jeweils identisch verteilt, wobei  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  und  $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  gelte. Die Varianzen seien identisch, also  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ .

### Hypothesen:

- a)  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  gegen  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ ,
- b)  $H_0 : \mu_X \geq \mu_Y$  gegen  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ ,
- c)  $H_0 : \mu_X \leq \mu_Y$  gegen  $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ .

### Testgröße:

$$T := \sqrt{\frac{n+m-2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(m-1) \cdot S_X^2 + (n-1) \cdot S_Y^2}}.$$

### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|T| > t_{m+n-2, 1-\alpha/2}$ ,
- b)  $T < t_{m+n-2, \alpha}$ ,
- c)  $T > t_{m+n-2, 1-\alpha}$ .

Vom Zwei-Stichproben- $t$ -Test findet man in der Literatur noch zusätzliche Varianten, die auch dann einsetzbar sind, wenn die beteiligten Zufallsgrößen nicht dieselbe Varianz besitzen. Der beim Ein-Stichproben-Fall erwähnte Wilcoxon-Test kann ebenfalls auf den Zwei-Stichproben-Fall übertragen werden.

#### 4.4.4 Nicht an Lageparametern orientierte Tests

Wir betrachten in diesem Abschnitt exemplarisch den  $\chi^2$ -Anpassungstest. Bei einem Anpassungstest wird nicht nur der Lageparameter einer Verteilung getestet, sondern es wird die Verteilung als Ganzes untersucht.

Beim approximativen Binomialtest (siehe Tabelle 1) haben wir streng genommen bereits einen Anpassungstest durchgeführt. Bei der Nullhypothese  $H_0 : p = p_0$  wird untersucht, ob es sich bei der betrachteten Zufallsgröße um eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $p_0$  handelt. Beim  $\chi^2$ -Test gehen wir nun einen Schritt weiter: Wir nehmen an, dass die Zufallsgröße  $X$  genau  $k$  verschiedene Werte annimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $W_X = \{1, \dots, k\}$ . Die Nullhypothese lautet nun

$$H_0 : \Pr[X = i] = p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

### Tabelle: $\chi^2$ -Anpassungstest

#### Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $W_{X_i} = \{1, \dots, k\}$ .

#### Hypothesen:

$$H_0 : \Pr[X = i] = p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, k,$$

$$H_1 : \Pr[X = i] \neq p_i \quad \text{für mindestens ein } i \in \{1, \dots, k\},$$

#### Testgröße:

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i},$$

wobei  $h_i$  die Häufigkeit angibt, mit der  $X_1, \dots, X_n$  den Wert  $i$  angenommen haben.

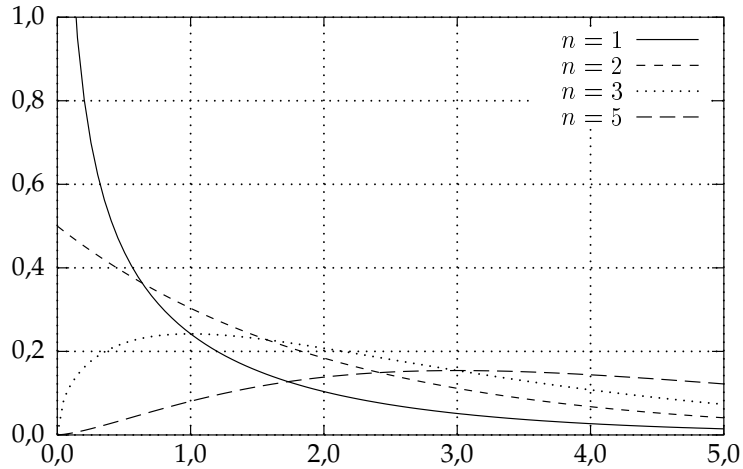
#### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

$$T > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2;$$

dabei sollte gelten, dass  $np_i \geq 1$  für alle  $i$  und  $np_i \geq 5$  für mindestens 80% der Werte  $i = 1, \dots, k$ .



Für die Testgröße  $T$  wird näherungsweise eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k - 1$  Freiheitsgraden angenommen. Die Werte dieser Verteilung finden sich in entsprechenden Tabellen in der Literatur. Damit diese Approximation gerechtfertigt ist, sollte gelten, dass  $np_i \geq 1$  für alle  $i$  und  $np_i \geq 5$  für mindestens 80% der Werte  $i = 1, \dots, k$ . Das  $\gamma$ -Quantil einer  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden bezeichnen wir mit  $\chi_{k,\gamma}^2$ .



Dichte der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden

## Beispiel 129

Als Anwendung für den  $\chi^2$ -Test wollen wir überprüfen, ob der Zufallszahlengenerator von Maple eine gute Approximation der Gleichverteilung liefert. Dazu lassen wir Maple  $n = 100000$  Zufallszahlen aus der Menge  $\{1, \dots, 10\}$  generieren. Wir erwarten, dass jede dieser Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $p_1 = \dots = p_{10} = 1/10$  auftritt. Dies sei unsere Nullhypothese, die wir mit einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,05$  testen wollen.

Beispiel:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_i$	10102	10070	9972	9803	10002	10065	10133	9943	10009	9901

Für den Wert der Testgröße gilt  $T = 8,9946$ . Ferner erhalten wir  $\chi_{9,0,95}^2 \approx 16,919$ . Der Test liefert also keinen Grund, die Nullhypothese abzulehnen.

Das Prinzip des  $\chi^2$ -Anpassungstests kann in leicht abgewandelter Form auch noch zum Testen einiger anderer Hypothesen verwendet werden: Beim  $\chi^2$ -Homogenitätstest wird überprüft, ob zwei oder mehrere Verteilungen identisch sind, während beim  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest zwei Zufallsgrößen auf Unabhängigkeit untersucht werden. Beschreibungen dieser Tests findet man in der Literatur.

# Kapitel IV Stochastische Prozesse

## 1. Einführung

Wir betrachten zeitliche Folgen von Zufallsexperimenten. Mathematisch beschreibt man diese durch einen so genannten **stochastischen Prozess**. Darunter versteht man eine Folge von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in T}$ , die das Verhalten des Systems zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  angeben.

Wenn wir  $T = \mathbb{N}_0$  annehmen, sprechen wir von einem stochastischen Prozess mit diskreter Zeit. Lässt man andererseits  $T = \mathbb{R}_0^+$  zu, so spricht man von stochastischen Prozessen mit kontinuierlicher Zeit.

Eine besonders einfache Art von stochastischen Prozessen sind so genannte **Markov-Ketten**. Diese haben die Eigenschaft, dass der nächste Zustand des Prozesses zwar vom aktuellen Zustand abhängen darf, nicht aber von der Historie, d.h. davon, wie der aktuelle Zustand erreicht wurde.

## 2. Prozesse mit diskreter Zeit

### 2.1 Einführung

#### Definition 130

Eine (endliche) Markov-Kette (mit diskreter Zeit) über der Zustandsmenge  $S = \{0, \dots, n-1\}$  besteht aus einer unendlichen Folge von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  mit Wertemenge  $S$  sowie einer Startverteilung  $q_0$  mit  $q_0^T \in \mathbb{R}^n$ . Die Komponenten von  $q_0$  sind hierbei  $\geq 0$  und addieren sich zu 1. Für jede Indexmenge  $I \subseteq \{0, \dots, t-1\}$  und beliebige Zustände  $i, j, s_k$  ( $k \in I$ ) gilt

$$\Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i, \forall k \in I : X_k = s_k] = \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]. \quad (9)$$

Sind die Werte

$$p_{ij} := \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]$$

von  $t$  unabhängig, so nennt man die Markov-Kette **(zeit)homogen**. In diesem Fall definiert man die **Übergangsmatrix** durch  $P = (p_{ij})_{0 \leq i, j < n}$ . Wenn man  $S = \mathbb{N}_0$  zulässt, so spricht man von einer **unendlichen Markov-Kette**.

Markov-Ketten sind nach **Andrey Andreyevich Markov** (1856–1922) benannt.



Bedingung (9) heißt **Markov-Bedingung** und besagt:

Wenn wir den Zustand  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  kennen, so hängt die Übergangswahrscheinlichkeit zum Folgezustand  $j$  nur von  $i$  und  $j$  ab. Die Vergangenheit (Zustände zu Zeitpunkten  $< t$ ) der Markov-Kette spielt keine Rolle. Das „Gedächtnis“ der Markov-Kette besteht also nur aus ihrem aktuellen Zustand und sie „weiß“ nicht, wie sie dorthin gekommen ist.

Bei einer zeithomogenen Markov-Kette hat die (absolute) Zeit  $t$  keinen Einfluss auf die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$ , d.h. das Systemverhalten wird nur durch den aktuellen Zustand bestimmt und nicht durch eine absolute Uhr.

## Wahrscheinlichkeitsraum einer Markov-Kette

Nehmen wir an, dass wir die Kette von der Zeit 0 bis zur Zeit  $t_0$  beobachten wollen. Wir bezeichnen die Folge von Zuständen, die von der Kette in dieser Zeit durchlaufen wurde, mit  $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{t_0})$ .  $\Omega \subseteq S^{t_0+1}$  sei die Menge möglicher Zustandsfolgen. Einer beliebigen Folge  $\omega := (x_0, x_1, \dots, x_{t_0}) \in \Omega$  ordnen wir die Wahrscheinlichkeit

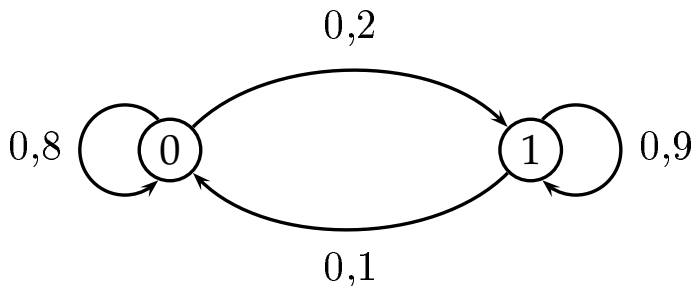
$$\Pr[\omega] = (q_0)_{x_0} \cdot \prod_{i=1}^{t_0} \Pr[X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}]$$

zu. Dadurch erhalten wir einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum im Sinne der Definition.

## Beispiel 131

$$\Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1] = 0,9, \Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0] = 0,2$$

$$\Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1] = 0,1, \Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0] = 0,8$$



Einen bestimmten Ablauf des Systems kann man sich als so genannten **Random Walk** vorstellen.

Wenn wir uns beispielsweise zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Knoten 1 (also  $X_0 = 1$ ) befinden, dann führen von dort zwei Kanten weiter, nämlich zu den Knoten 0 und 1. Diese Kanten sind mit Wahrscheinlichkeiten beschriftet, die sich zu Eins addieren. Gemäß dieser Wahrscheinlichkeiten entscheiden wir zufällig, wohin wir uns im nächsten Schritt begeben.

Wir können auch die Frage beantworten, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir uns zum Zeitpunkt  $t = 2$  im Knoten 1 befinden. Da wir vereinbarungsgemäß beim Knoten 1 starten, gibt es zwei mögliche Wege der Länge zwei durch den Graphen mit Endknoten 1, nämlich „111“ und „101“. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Wege lauten  $0,9 \cdot 0,9 = 0,9^2$  bzw.  $0,1 \cdot 0,2$ . Insgesamt erhalten wir also eine Wahrscheinlichkeit von  $0,81 + 0,02 = 0,83$ .

Auch eine Aussage über die erwartete Anzahl Schritte, die wir im Knoten 1 bis zum ersten Übergang zu Knoten 0 verbleiben, ist schnell getroffen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man genau  $k$  Schritte verbleibt, ist  $(0,9)^k \cdot 0,1$ . Die Anzahl Schritte ist also geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit 0,1. Der Erwartungswert ist daher  $1/0,1 = 10$ .