

---

## Diskrete Strukturen

---

### Hin.Ti's zu Aufgaben von Blatt 9

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Haus- oder Zusatzaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Aufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

#### ad HA 1:

1.  $\implies$ : Nach Definition gilt  $\text{ord}(g) = \min\{m : g^m = e\}$ . Es folgt  $g^d = e$ . Seien  $n > 0$  und  $g^n = e$ . Folgern Sie nun  $d|n$ .  $\impliedby$ : Sei  $d > 0$  mit  $g^d = e$  und für jedes  $n > 0$  mit  $g^n = e$  gelte  $d|n$ . Folgern Sie  $d = \text{ord}(g)$ .
2. Es gilt  $\text{ord}(g) = x \cdot \text{ggT}(\text{ord}(g), n)$  und  $n = y \cdot \text{ggT}(\text{ord}(g), n)$  für gewisse teilerfremde  $x$  und  $y$ . Es folgt  $nx = y \cdot \text{ord}(g)$ . Zeigen Sie mit Teilaufgabe 1, dass  $\text{ord}(g^n)$  Teiler von  $\frac{\text{ord}(g)}{\text{ggT}(\text{ord}(g), n)}$  ist. Zeigen Sie nun, dass auch  $\frac{\text{ord}(g)}{\text{ggT}(\text{ord}(g), n)}$  Teiler von  $\text{ord}(g^n)$  ist.

#### ad HA 2:

1. Sei  $n \geq 3$ . Wenn  $S_n$  zyklisch ist, dann gibt es ein  $p \in S_n$ , so dass  $\text{ord}(p) = |S_n| = n!$  gilt. Betrachten Sie nun die Zyklendarstellung von  $p$  und leiten Sie daraus  $\text{ord}(p) < n!$  und damit einen Widerspruch ab.
2. Die Ordnung einer Permutation  $p$  wird durch das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen der Zyklen in der Zyklendarstellung von  $p$  bestimmt (siehe Korollar 107 der Vorlesung). Zeigen Sie  $k = 12$ .

#### ad HA 3:

Wann sind zyklische Gruppen isomorph?

#### ad HA 4:

Setzen Sie  $a(x) = a_0 + a_1x$ ,  $b(x) = b_0$ ,  $c(x) = c_0$  und bestimmen Sie die unbekanntenen Koeffizienten durch geeigneten Koeffizientenvergleich.

#### ad HA 5:

1. Wenden Sie die Formel  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$  mehrmals geeignet an.
2. Bezeichnen Sie die 6 Funktionen mit  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f_3(x) = 1 - x$ ,  $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $f_5(x) = \frac{x}{x-1}$  und  $f_6(x) = \frac{x-1}{x}$ . Berechnen und tabellieren Sie die Funktionen  $(f_i \circ f_j)(x) = f_i(f_j(x))$ . Beweisen Sie Abgeschlossenheit der Menge der 6 genannten Funktionen gegenüber Komposition. Die Assoziativität der Komposition  $\circ$  ist bekannt. Beweisen Sie die Existenz des neutralen Elements und die Existenz von Inversen durch Benützung Ihrer Verknüpfungstabelle.