Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2011/12
Übungsblatt 12
16. Januar 2012

# Diskrete Strukturen

*Abgabetermin: 24. Januar 2012, 14 Uhr in die* **DS Briefkästen**

## Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Die Binomische Formel gilt auch, wenn man statt Potenzen fallende oder steigende Faktorielle verwendet. Beweisen Sie die folgende Gleichung für alle $n \geq 0$ durch Induktion.

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}\,.$$

## Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Man zeige:
$$\frac{x^{\underline{m}}}{x^{\underline{n}}} = \frac{1}{(x-m)^{\underline{n-m}}}\,.$$

2. Sei $\omega = i$ und damit eine primitive 4-te Einheitswurzel. Stellen Sie $z^{\overline{3}} \in \mathbb{C}[z]$ in der Form $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ dar und berechnen Sie die diskrete Fouriertransformierte $\mathcal{F}_{4,\omega}(\vec{a})$ des Koeffizientenvektors $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.

   Vereinfachen Sie die Ergebnisdarstellung nach Möglichkeit.

## Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

10 Gewinne werden auf 3 Spieler verteilt. Ein Spieler kann stets auch mehrere Gewinne erhalten. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es,

1. wenn die Gewinne unterscheidbar sind und es nicht egal ist, wer welche Gewinne bekommt. Es sollen alle Gewinne verteilt werden.

2. wenn die Gewinne nicht unterscheidbar sind und es egal ist, wer wie viele Gewinne bekommt. Es können alle Gewinne oder auch eine beliebige Teil-Multimenge der Gewinne verteilt werden.

3. wenn die Gewinne nicht unterscheidbar sind und es nicht egal ist, wer wie viele Gewinne bekommt. Es sollen alle Gewinne verteilt werden.

Zur Darstellung der Ergebnisse dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.

## Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

1. Wie viele Wörter der Länge 9 gibt es, die genau je 3 Buchstaben $a$ und $b$ und $c$ enthalten?
2. Seien $N$ und $R$ endliche Mengen mit $|N| = 10$ und $|R| = 11$. Wie viele Abbildungen $f : N \to R$ gibt es, so dass für das Bild $f(N) = \{f(n)\,;\, n \in N\}$ gilt $|f(N)| = 9$ ?
3. Wir betrachten 10 nicht unterscheidbare Bälle und 11 unterscheidbare Boxen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mindestens 9 Bälle auf die Boxen so zu verteilen, dass die Anzahl der leeren Boxen gleich 2 ist?

Zur Darstellung der Ergebnisse dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.

## Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Die Stirling-Zahlen zweiter Art $S_{n,k}$ erfüllen für alle $n, k \in \mathbb{N}$
die Rekursion $S_{n,k} \;=\; S_{n-1,k-1} \;+\; k \cdot S_{n-1,k}\,.$

1. Beweisen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \;=\; 2^n - 1\,.$$

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über $n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} S_{i,2} \;=\; \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}\,.$$

3. Was ergibt die folgende Summe für $n \geq 2$ und die Stirling-Zahlen $s_{n,k}$ erster Art? Beweis!

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k}\,.$$

***Hinweis:*** *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

## Vorbereitung 1

Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Weiter seien $A(z)$ und $B(z)$ entsprechend ihre erzeugenden Funktionen, d.h.

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{bzw.} \qquad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass die nachfolgend angegebenen Folgen $(c_n)_{n\geq 0}$ und ihre erzeugende Funktion $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jeweils die angegebene Beziehung erfüllen.

1. Mit $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) + B(z)$.
2. Mit $c_n := a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0)$.
3. Mit $c_0 := 0$ und $c_n := a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C(z) = z \cdot A(z)$.
4. Mit $c_n := (n+1) \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{d}{dz}(z \cdot A(z))$.
5. Mit $c_n := n \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = z \cdot \frac{d}{dz} A(z)$.
6. Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = \frac{A(z)}{1-z}$.
7. Mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $C(z) = A(z) \cdot B(z)$.

## Vorbereitung 2

Gegeben sei die Funktion

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z - 5}{z^3 - 2z^2 - 5z + 6}\,.$$

Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, zu der $F(z)$ die erzeugende Funktion darstellt.

## Vorbereitung 3

Bearbeiten Sie Arbeitsblatt 3 über die Lösung von Rekursionsgleichungen.

## Tutoraufgabe 1

1. Gegeben sei die Rekursionsgleichung $f_n - 4f_{n-1} + 4f_{n-2} = 0 \; \forall n \geq 2$ mit variablen Anfangsbedingungen $f_0 = a$ und $f_1 = b$.

   (a) Bestimmen Sie die entsprechende vollständige Rekursion (siehe Arbeitsblatt 3).

   (b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Rekursiongleichung.

   (c) Zeigen Sie, dass $F(z) = \frac{a+(b-4a)z}{1-4z+4z^2}$ die erzeugende Funktion zur Rekursionsgleichung ist.

   (d) Zeigen Sie, dass $f_n = \left(\left(\frac{b}{2} - a\right) n + a\right) 2^n$ gilt für alle $n \geq 0$.

2. Sei $a_n$ für $n \geq 0$ definiert durch $a_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$. Zeigen Sie, dass stets $a_n \in \mathbb{N}$ gilt, und geben Sie eine möglichst einfache Rekursionsgleichung für die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ an.

## Tutoraufgabe 2

Gegeben sei die inhomogene lineare Rekursion für eine Folge $(f_n)_{n\geq 0}$

$$f_{n+1} + 3 \cdot f_n \;=\; n \cdot 2^n \,, \quad \forall n \geq 0 \,. \tag{1}$$

1. Leiten Sie für $s_n = n \cdot 2^n$ eine Rekursion der folgenden Form her

   $$s_{n+2} + a \cdot s_{n+1} + b \cdot s_n \;=\; 0 \,, \quad \forall n \geq 0 \tag{2}$$

   und bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Leiten Sie durch geeignete Substitution aus den Gleichungen (1) und (2) eine homogene Rekursion für $(f_n)_{n\geq 0}$ der folgenden Form her

   $$f_{n+3} + q_1 \cdot f_{n+2} + q_2 \cdot f_{n+1} + q_3 \cdot f_n \;=\; 0 \,, \quad \forall n \geq 0 \tag{3}$$

   und bestimmen Sie $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$.

3. Geben Sie die allgemeine Lösung der Rekursion (3) an.

4. Lösen Sie die Rekursion (1) mit Nebenbedingung $f_0 = 1$. Geben Sie die erzeugende Funktion der erhaltenen Lösung an.

## Tutoraufgabe 3

Stellen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben zunächst eine homogene bzw. inhomogene lineare Rekursionsgleichung auf.

1. $n$ Personen (Informatikstudenten I, Mathematikstudenten M oder Professoren P) rutschen hintereinander in einer der Rutschen im FMI-Gebäude. Wir unterscheiden die Personen nur insofern, als sie verschiedenen Gruppen I, M oder P angehören.

   (a) Wie viele Möglichkeiten von „Rutschreihenfolgen“ gibt es, wenn nicht zwei Professoren hintereinander rutschen dürfen?

   (b) Wie viele Möglichkeiten von „Rutschreihenfolgen“ gibt es, wenn die Anzahl der Professoren gerade sein soll?

2. Wie viele Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, die keine drei aufeinander folgende Zahlen enthalten?