
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabetermin: Jeweilige Tutorübung in der Woche vom 4. bis 8. Juni

Tutoraufgabe 1

Konstruieren Sie eine statische, perfekte Hashtabelle für die Elemente:

(16, 10, 11) (8, 2, 15) (7, 12, 8) (1, 10, 3) (13, 11, 14) (6, 11, 14)
(7, 3, 16) (2, 2, 8) (10, 5, 15) (7, 3, 14) (2, 10, 1) (14, 11, 6)

Jedes Element x besteht aus den Stellen (x_0, x_1, x_2) . Verwenden Sie jeweils passend eine der Hashfunktionen:

$$\begin{aligned} & (\sum_{i=0}^2 2^i x_i) \bmod 17 \\ & (\sum_{i=0}^2 a_i x_i) \bmod 7 \text{ mit } \mathbf{a} = (0, 0, 1) \text{ oder } \mathbf{a} = (6, 6, 2) \\ & (\sum_{i=0}^2 a_i x_i) \bmod 3 \text{ mit } \mathbf{a} = (1, 0, 0) \text{ oder } \mathbf{a} = (0, 2, 2). \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten eine Schlüsselmenge $\text{Key} = \{0, \dots, p-1\} = \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p . Für $a, b \in \mathbb{Z}_p$ und $m \in \{1, \dots, p\}$ definieren wir die einfache lineare Hashfunktion $h_{(a,b)} : \text{Key} \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$ durch

$$h_{(a,b)}(x) = ((ax + b) \bmod p) \bmod m.$$

Weiterhin betrachten wir die Familie von Hashfunktionen

$$H^* = \{h_{(a,b)} \mid a, b \in \mathbb{Z}_p\}.$$

Zeigen Sie, dass H^* eine $\binom{\lceil p/m \rceil}{p/m}$ -universelle Familie ist.

Zusatzaufgabe 1

Wir betrachten ein Negativbeispiel für eine Hashfunktion, die auf einem String s der Länge n aus Charactern (s_1, \dots, s_n) arbeitet:

$$h(s) := \sum_{i=1}^n \text{Anzahl der Einsen in der Binärdarstellung von } s_i.$$

Nehmen Sie an, dass jedes der 256 Zeichen in dem Text gleichwahrscheinlich vorkommt. Begründen Sie, warum Sie die Hashfunktion nicht für geeignet halten.

Hausaufgabe 1

Implementieren Sie die Methoden `insert`, `remove` und `find` für Cuckoo-Hashing. Als Hashfunktionen werden Funktionen vom Typ

$$\left(\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j \right) \bmod p \right) \bmod n$$

mit einem Vektor $a = (a_0, \dots, a_{k-1})$ und ganzen Zahlen k, p und n verwendet, die bei der Initialisierung übergeben werden. Beachten Sie, dass x hier nur eine ganze Zahl und *kein* Vektor ist. Die Zahl n gibt hier die Größe der Hashtabelle an. Außerdem soll bei der Initialisierung der Hashtabelle ein Wert `max` übergeben werden, der einen Höchstwert für die Anzahl der Verschiebungen angibt (in der Vorlesung sind dies $2 \log n$). Wenn dieser Wert der Verschiebungen erreicht wird, so dürfen Sie das Programm sofort beenden.

Verwenden Sie für Ihre Implementierung die auf der Übungswebseite bereitgestellten Klassen und verändern Sie für Ihre Implementierung *ausschließlich* die Klasse `DynHash`.

Achten Sie bei der Abgabe Ihrer Aufgabe darauf, dass Ihre Klasse `DynHash` heißt und auf den Rechnern der Rayhalle (`rayhalle.informatik.tu-muenchen.de`) mit der bereitgestellten Datei `main_d` kompiliert werden kann. Anderenfalls kann eine Korrektur nicht garantiert werden. Achten Sie darauf, dass Ihr Quelltext ausreichend kommentiert ist.

Schicken Sie die Lösung per Email mit dem Betreff `[GAD] Gruppe <Gruppennummer>` an Ihren Tutor.

Hausaufgabe 2

Ziel dieser Aufgabe ist, zu zeigen, dass einfache lineare Hashfunktionen vergleichsweise schlecht sind, wenn sie die Form $(ax + b) \bmod m$ besitzen (im Gegensatz zu den linearen Hashfunktionen aus der zweiten Tutoraufgabe, bei denen zusätzlich mit Primzahlen gearbeitet wird).

Sei $\text{Key} = \{0, \dots, n - 1\}$ und betrachte die Familie

$$H^{\text{fool}} = \{h_{(a,b)} \mid a, b \in \{0, \dots, n - 1\}\},$$

wobei $h_{(a,b)}(x) = (ax + b) \bmod m$.

Zeigen Sie, dass es eine Menge $S \subseteq \text{Key}$ bestehend aus mindestens $\lceil n/m \rceil$ Schlüsseln gibt, sodass für je zwei Schlüssel $x, y \in S$ und jede Hashfunktion $h \in H^{\text{fool}}$ gilt: $h(x) = h(y)$.

Hausaufgabe 3

Veranschaulichen Sie Double Hashing. Die Größe der Hash-Tabelle ist dabei $m = 13$. Führen Sie die folgenden Operationen aus.

Insert 15, 2, 12, 16, 28, 9, 23, 4, 7, 13, 8, 1, 5

Verwenden Sie die Hashfunktion

$$h(k, i) = [h(k) + i \cdot h'(k)] \bmod m, \text{ wobei } h(k) = 5k \bmod m \text{ und } h'(k) = 1 + (3k \bmod (m-1))$$

Die Schlüssel der Elemente sind (im Kontext dieser Aufgabe) die Elemente selbst.