2.9 Erreichbarkeit

Definition 269

Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G erreichbar, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.

Satz 270

Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \iff \text{„}v \textit{ ist von } u \textit{ aus in } G \textit{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. $\square$

2.10 Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen Zusammenhangskomponenten von G. G heißt zusammenhängend, falls G aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

2.11 Bäume

Definition 271

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt Baum, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

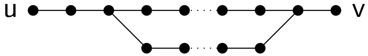
1. $G = (V, E)$ *ist ein nichtleerer Baum.*
2. $V \neq \emptyset$ *und für je zwei Knoten* $u, v \in V$ *mit* $u \neq v$ *gibt es genau einen einfachen Pfad von* u *nach* v.
3. G *ist zusammenhängend und* $|V| = |E| + 1$.

Beweis:

$1. \Rightarrow 2.$

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad von u nach v existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade von u nach v.



Dann gibt es einen Kreis in G, was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

Beweis (Forts.):

$2. \Rightarrow 3.$ Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang).
G muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle $u \in V$ beliebig. Wähle einen Nachbarn u_1 von u. Falls $deg(u_1) > 1$, wähle einen Nachbarn $u_2 \neq u$ von u_1 usw. Da V endlich und G zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).
Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$\big(|V| - 1\big) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

Beweis (Forts.):

$3. \Rightarrow 1.$

Sei nun G zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.
Zu zeigen: G ist kreisfrei.
Widerspruchsannahme: G enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.
Da wir G aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils einer neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.

$\square$

Korollar 273

Seien $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ die Gradfolge von T, dann gilt:

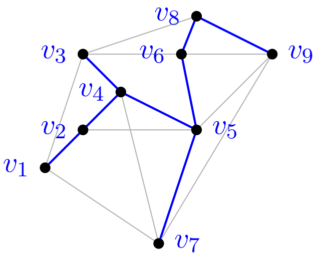
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

2.12 Spannbäume

Definition 274

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum und $V' = V$ ist.

Beispiel 275



$E' = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_7), (v_5, v_6), (v_6, v_8), (v_8, v_9)\}$

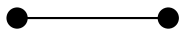
Satz 276 (Arthur Cayley, 1889)

Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \ldots, n\}$. Dann gilt:

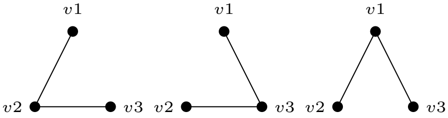
$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel 277

- $n = 2$:

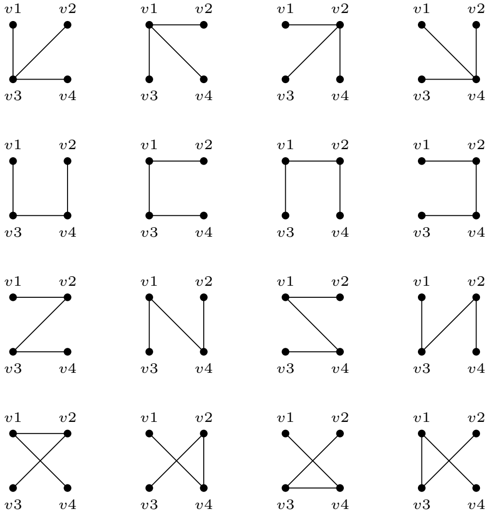


- $n = 3$:



Beispiel (Forts.)

- $n = 4$:



Beweis:

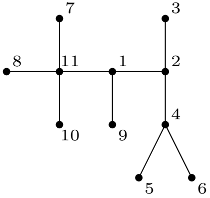
Wir geben eine Bijektion zwischen der Menge $\mathcal{T}(n)$ der markierten Spannbäume mit n Knoten und der Menge $\{1, \ldots, n\}^{n-2}$ an.
(Diese Bijektion geht auf H. Prüfer zurück; man bezeichnet sie deshalb auch als Prüfer-Code.)

Beweis (Forts.):

Sei $T \in \mathcal{T}(n)$. Konstruiere $(a_1, \ldots, a_{n-2})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$, wie folgt:

for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    $v_i :=$ `Blatt mit minimalem Index`
    $a_i :=$ `Index des Nachbarn von` v_i `in` T
    $T := T \setminus \{v_i\}$
od

Beispiel 278



Prüfer-Code: $(2, 4, 4, 2, 1, 11, 11, 1, 11)$

Beweis (Forts.):

Sei $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$; f_i sei die Anzahl des Auftretens von i in $(a_1, \ldots, a_{n-2})$. Wenn ein Blatt, das Nachbar von a_i ist, im Algorithmus gestrichen wird, ist a_i nicht das kleinste Blatt, sondern innerer Knoten:

$$d(a_i) \geq f_i + 1$$

Da

$$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{n} \big(d(v_i) - 1\big) = 2n - 2 - n = n - 2$$

gilt

$$(\forall i)\Big[f_i = d(a_i) - 1\Big]$$

Also ergeben sich aus den f_i die Knotengrade. Insbesondere sind die Knoten mit $f_i = 0$ (also die, die nicht im Code auftauchen), genau die Blätter des Baumes.

Beweis (Forts.):

Umkehrabbildung: Gegeben $(a_1, \ldots, a_{n-2}) \in \{1, \ldots, n\}^{n-2}$

for $i = 1$ **to** n **do**
  $d(v_i) := f_i + 1$
od
$B := \emptyset$; $T := \emptyset$
for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
  $b := \min_{1 \le j \le n} \{j;\ j \notin \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-2}\} \cup B\}$
  `füge Kante` (b, a_i) `zu` T `hinzu`
  $B := B \cup \{b\}$
od
`füge letzte Kante zu` T `gemäß Gradbedingung hinzu`

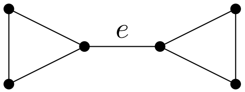
$\square$

2.13 Brücken

Definition 279

Eine Kante e eines Graphen $G = (V, E)$ heißt Brücke, falls $G' = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

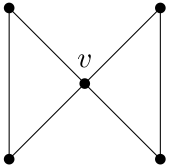
Beispiel 280



Beobachtung:

Eine Kante e ist genau dann eine Brücke, wenn es keinen (einfachen) Kreis gibt, der e enthält.

Anmerkung: (ohne Definition)
Der Knoten v in der folgenden Abbildung ist ein Artikulationsknoten:



2.14 Abstand

Definition 281

Seien u, v zwei Knoten und P ein Pfad in G von u nach v mit einer minimalen Anzahl k von Kanten. Dann heißt

$$\mathrm{d}(u, v) := k$$

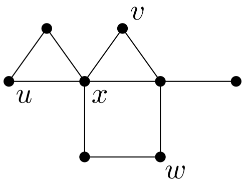
der Abstand von u und v in G.

Wir setzen $\mathrm{d}(u, v) := \infty$, falls u und v in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G liegen.

$$\mathsf{D}(G) := \max\left\{\mathrm{d}(u, v); u, v \in V\right\}$$

heißt der Durchmesser des Graphen G.

Beispiel 282



$\mathrm{d}(u,v) = 2$, $\mathrm{d}(u,w) = 3$, $\mathrm{d}(u,x) = 1$, $\mathsf{D}(G) = 3$.

Beobachtung:

d erfüllt die Dreiecksungleichung, ist also eine Metrik:

$$\mathrm{d}(u,v) \leq \mathrm{d}(u,w) + \mathrm{d}(w,v)$$

2.15 Adjazenzmatrix

Definition 283

Sei $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Beobachtungen:

- Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch.
- Gibt es keine Schlingen, so sind alle Diagonalelemente null.

Satz 284

Sei A die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$, $|V| = n$, und sei

$$A^0 := I,$$
$$A^{i+1} := A^i \cdot A \qquad \textit{für alle } i \geq 0.$$

Dann gilt für

$$A^k = \left(a_{ij}{}^{(k)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}:$$

$a_{i,j}{}^{(k)}$ *ist die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k in G von v_i nach v_j.*

Achtung: Die Länge eines Pfades wird hier durch die Länge seiner Kanten- und nicht der Knotenfolge angegeben!

Beweis:

Induktion nach k:

Induktionsanfang: $k = 0$ und $k = 1$ sind trivial.

Induktionsschluss: $k \mapsto k + 1$
${a_{il}}^{(k)}$ ist nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl verschiedener Pfade der Länge k von v_i nach v_l.
Die Anzahl verschiedener Pfade von v_i nach v_j der Länge $k + 1$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\sum_{l=1}^{n} {a_{il}}^{(k)} \cdot a_{lj} = {a_{ij}}^{(k+1)}$$

$\square$

Bemerkung:

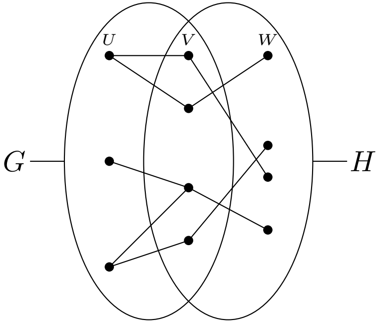
Adjazenzmatrix von bipartiten Graphen

Sei $G = (U, V, E)$ mit $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ ein bipartiter Graph. Dann heißt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \quad \text{mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Werden zwei bipartite Graphen zusammengesetzt, zum Beispiel:



berechnet sich die Adjazenzmatrix A' des bipartiten Graphen $G' = (U, W, E')$, mit

$$\{u, w\} \in E' \iff (\exists v \in V)[\{u, v\} \text{ in } G \text{ und } \{v, w\} \text{ in } H]$$

als das boolesche Produkt $A_G \cdot A_H$:

Wir betrachten einfache ungerichtete Graphen.

Definition 285

Seien $A \in \mathbb{B}^{m,k}$, $B \in \mathbb{B}^{k,n}$ zwei boolesche Matrizen, interpretiert als $0,1$-Matrizen. Dann ist das boolesche Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen gegeben durch

$$c_{i,j} = \bigvee_{l=1}^{k} a_{i,l} \wedge b_{l,j} \qquad \text{für } i \in [m], j \in [n]$$

2.16 Inzidenzmatrix

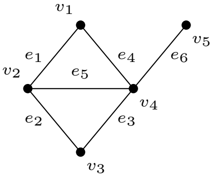
Definition 286

Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \quad \text{mit} \quad b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

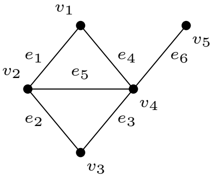
Beispiel 287 (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel (Adjazenz- und Inzidenzmatrix)



Inzidenzmatrix:

$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & \\ & \mathrm{d}(v_2) & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} + A$$

3. Definitionen für gerichtete Graphen

3.1 Digraph

Definition 288

Ein Digraph (aka gerichteter Graph, engl. *directed graph*) $G = (V, A)$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Menge $A \subseteq V \times V$ von geordneten Paaren, den gerichteten Kanten.

3.2 Grad

Definition 289

- $\mathrm{d}^-(v)$ ist der Aus-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Anfangsknoten v.
- $\mathrm{d}^+(v)$ ist der In-Grad von v, d. h. die Anzahl der Kanten mit Endknoten v.
- $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^-(v) + \mathrm{d}^+(v)$ ist der (Gesamt-)Grad von v.

Beobachtung:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{d}^-(v) = \sum_{v \in V} \mathrm{d}^+(v) = |A|$$

3.3 Adjazenzmatrix

Definition 290

Sei $G = (V, A)$ ein Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann heißt

$$C = \big(c_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n} \quad \text{mit } c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Adjazenzmatrix von G.

Falls G schlingenfrei ist, sind alle Diagonalelemente von C gleich 0.

3.4 Inzidenzmatrix

Definition 291

Sei $G = (V, A)$ ein einfacher(!) Digraph mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $A = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Dann heißt

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i \text{ Endknoten von } e_j \\ -1 & \text{falls } v_i \text{ Anfangsknoten von } e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Inzidenzmatrix von G.

Beobachtung:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} \mathrm{d}(v_1) & & & 0 \\ & \mathrm{d}(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{d}(v_n) \end{pmatrix} - A'$$

Diese Matrix heißt Laplacesche Matrix. Dabei ist, für alle i, j, der Eintrag $a'_{i,j}$ die Anzahl der im zu G gehörigen ungerichteten Graphen zwischen v_i und v_j verlaufenden Kanten. Enthält G keine antiparallelen Kanten, ist damit A' gleich der Adjazenzmatrix dieses ungerichteten Graphen.

Beobachtung: Die Laplacesche Matrix ist symmetrisch.