

---

## Diskrete Strukturen

---

### Arbeitsblatt 3: Ungeordnete Zahlpartitionen

---

**Hinweis:** Arbeitsblätter in diesem Semester dienen grundsätzlich der selbstständigen Vorbereitung von Haus- und Tutoraufgaben mit besonderen thematischen Schwerpunkten.

---

Kombinatorik beinhaltet einerseits die Zählung von Lösungen für gewisse Probleme und andererseits insbesondere die theoretische Darstellung des Zusammenhangs der verschiedenen Zählprobleme.

Für den systematischen Vergleich und die Klassifizierung von Zählproblemen ist der Begriff der unterscheidbaren bzw. nicht unterscheidbaren Elemente, d.h. der Begriff der Multimenge und der Zuordnung von Multimengen fundamental. Eine exemplarische Durchführung einer Klassifizierung auf der Grundlage von Multimengen wurde in der Vorlesung in einer tabellarischen Zusammenfassung vorgestellt und ist Gegenstand der Vorbereitungsaufgabe 4 von Übungsblatt 10.

Wir behandeln hier als Beispiel die Bestimmung der Anzahl der ungeordneten Zahlpartitionen mit  $k$  Summanden und der Summe  $n$  für beliebige  $k, n \in \mathbb{N}_0$  und charakterisieren die Methoden als Bestimmung der Anzahl gewisser Zuordnungen von Multimengen.

Zusammenfassung einiger Definitionen für Multimengen:

Der Begriff einer Multimenge basiert auf der Idee, dass von Elementen einer Menge  $B$  beliebig viele gleiche, d.h. *nicht unterscheidbare Exemplare* erzeugt und eine beliebige Gesamtheit von unterscheidbaren oder nicht unterscheidbaren Exemplaren zu einer neuen Struktur zusammengefasst werden können. Demnach ist eine *Multimenge*  $M$  über einer Menge  $B$  eine Zusammenfassung von Exemplaren von Elementen der Menge  $B$ .

Ein Mengenelement  $x$ , zu dem ein Exemplar erzeugt wird, kann man *Bestimmungselement* des erzeugten Exemplars nennen. Demnach kann man zu jeder Multimenge  $M$  die Menge  $B_M$  aller Bestimmungselemente der Elemente von  $M$  bilden. Zwei Elemente einer Multimenge sind *unterscheidbar* genau dann, wenn ihre Bestimmungselemente verschieden sind.

Eine Multimenge  $N$  ist eine *Teil-Multimenge* von  $M$ , falls von jedem Element  $x$  einer beliebigen Menge höchstens so viele Exemplare in  $N$  enthalten sind, wie Exemplare davon in  $M$  enthalten sind. Eine Partition einer Multimenge  $M$  ist eine Aufteilung von  $M$  in disjunkte Teil-Multimengen.

Der Begriff der *Abbildung oder Zuordnung einer Multimenge  $N$  in eine Multimenge  $R$*  wird anschaulich durch das Bild der Verteilung von Bällen aus  $N$  auf Schachteln oder Boxen aus  $R$  definiert, wobei die Elemente aus  $N$  als *Bälle* und die Elemente aus  $R$  als *Boxen* bezeichnet werden.

## Aufgabe 1 (Partitionen)

Wir betrachten Multimengen  $M$ , die aus  $n \in \mathbb{N}_0$  nicht unterscheidbaren Elementen bestehen. Solche Multimengen nennen wir *homogen*.

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ungeordneten  $k$ -Zahlpartitionen und Partitionen von homogenen Multimengen?
2. Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Aufgabe,  $n$  unterscheidbare Bälle in  $m$  nicht unterscheidbare Boxen (Schachteln) zu verteilen, und der Aufgabe,  $n$  nicht unterscheidbare Bälle in  $m$  nicht unterscheidbare Boxen zu verteilen.

## Lösung

1. Teil-Multimengen einer homogenen Multimenge werden durch die Anzahl der enthaltenen Elemente charakterisiert. Die Partitionen einer homogenen Multimenge sind dann durch die Multimenge der Klassenmächtigkeiten bzw. deren Summe bestimmt, was unmittelbar den Zusammenhang mit den ungeordneten Zahlpartitionen begründet.
2. Die Nichtunterscheidbarkeit der Boxen (Schachteln) bedeutet, dass man lediglich über Klasseneinteilungen der Bälle, d. h. Partitionen der Multimenge von Bällen, spricht, denn wenn es gleichgültig ist, in welche Box ein Ball gelegt wird, dann ist offenbar nur interessant, welche Bälle in die gleiche Box gelegt werden. Diese Gleichheit der Abbildung von Elementen entspricht aber genau der Klasseneinteilung von Bällen.

Also können im Fall nicht unterscheidbarer Boxen die Boxen selbst aus der Betrachtung entfernt werden und wir sprechen lediglich über Klasseneinteilungen, d. h. Partitionen von Multimengen. Dabei ist es unerheblich, ob die Bälle unterscheidbar sind oder nicht.

## Aufgabe 2 (Formeln)

Wir betrachten wieder homogene Multimengen  $M$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  Elementen, die also paarweise nicht unterscheidbar sind.

Sei  $P_{n,k}$  die Anzahl der Partitionen von  $M$  in  $k$  Klassen.

1. Bestimmen Sie  $P_{n,0}$ ,  $P_{n,k}$  und  $P_{n,n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $k > n$ !
2. Beweisen Sie für alle  $k \leq n$ : 
$$P_{n,k} = \sum_{i=0}^k P_{n-k,i}.$$
3. Studieren Sie die Darstellung der Werte von  $P_{n,k}$  bis  $n \leq 8$  und  $k \leq 4$  nach Art des Pascalschen Dreiecks aus der Vorlesung.

Die Eigenschaften von Teilaufgabe 2.1 sind solche, die unabhängig davon sind, ob die enthaltenen Elemente unterscheidbar sind oder nicht. Vergleichen Sie dazu die dritte und vierte Zeile der entsprechenden Tabelle der Vorlesung, die völlig identisch sind abgesehen von der Zählfunktion  $S$  bzw.  $P$ .

## Lösung

1. Die folgenden Beweise sind analog zu den entsprechenden Beweisen für Stirlingzahlen  $S_{n,k}$ .

$P_{0,0}$ : Für  $n = 0$  ist eine  $n$ -elementige Multimenge leer. Die leere Partition, d. h. die leere Multimenge von Klassen, ist eine, und mithin die einzige, Partition der leeren Multimenge mit  $k = 0$ . Es folgt  $P_{0,0} = 1$ .

$P_{n,0}, n > 0$ : Da die Vereinigung aller Klassen die zu partitionierende, nichtleere Multimenge überdecken muss, existiert mindestens eine nichtleere Klasse. Daraus folgt aber  $k > 0$ . Mithin gilt  $P_{n,0} = 0$ .

$P_{n,n}$ : Eine Partition, die ebenso viele Klassen besitzt, wie die zu partitionierende Multimenge, besteht aus einelementigen Klassen. Sie ist eindeutig bestimmt. Es folgt  $P_{n,n} = 1$ .

$P_{n,k}$ : Falls  $k > n$ , dann soll die Anzahl der Klassen einer Partition größer sein als die Mächtigkeit der zu partitionierenden Multimenge. Da die Klassen jeder angenommenen Partition paarweise disjunkt sind, muss mindestens eine der Klassen leer sein, was aber der Definition von Klassen einer Partition widerspricht. Als folgt  $P_{n,k} = 0$ , weil keine solche Partition existiert.

2. Für  $k = 0$  folgt unmittelbar  $\sum_{i=0}^k P_{n-k,i} = P_{n-0,0} = P_{n,0}$ .

Sei  $1 \leq k \leq n$ . Sei  $P$  eine Partition einer Multimenge von  $n$  nicht unterscheidbaren Elementen in  $k$  Klassen. Entfernt man aus jeder Klasse ein beliebiges (weil nicht unterscheidbares) Element, so erhält man  $i$  nichtleere Klassen mit  $0 \leq i \leq n$ , deren Vereinigung  $n - k$  Elemente enthält. D. h., wir erhalten eine Partition einer  $(n - k)$ -elementigen Multimenge mit  $i$  Klassen. Die Operation der Entfernung eines Elements aus jeder Klasse liefert eine bijektive Abbildung der Menge der  $k$ -Partitionen einer  $n$ -elementigen Multimenge auf die disjunkte Vereinigungsmenge aller  $i$ -Partitionen einer  $(n - k)$ -elementigen Multimenge. Daraus folgt  $P_{n,k} = \sum_{i=0}^k P_{n-k,i}$ .

- 3.

$P_{n,k}$	$k=0$	1	2	3	4
$n = 0$	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	1	1	
4	0	1	2	1	1
5	0	1	2	2	1
6	0	1	3	3	2
7	0	1	3	4	3
8	0	1	4	5	5

Die leeren Felder der  $9 \times 5$ -Tabelle stellen die 0 dar.

### Aufgabe 3 (Beispiele)

1. Ungeordnete Zahlpartitionen:

4 nicht unterscheidbare Studenten erhalten 12 nicht unterscheidbare Tafeln Schokolade. Wieviele Möglichkeiten gibt es jeweils, stets ganze Tafeln auf die 4 Studenten aufzuteilen.

2. Geordnete Zahlpartitionen:

Die Quersumme der dekadischen Darstellung einer natürlichen Zahl ist die Summe der Ziffern der Darstellung zur Basis 10, z. B. hat 5404 die Quersumme 13. Wieviele Zahlen zwischen 0 und 9999 mit Quersumme 13 gibt es?

### Lösung

1. Ungeordnete Zahlpartitionen bzw.  $n$  nicht unterscheidbare Bälle auf  $k$  nicht unterscheidbare Urnen, wobei in jede Urne mindestens ein Ball kommt, also surjektiv:

$$\begin{aligned} P_{12,4} &= \sum_{i=0}^4 P_{8,i} = P_{8,0} + P_{8,1} + P_{8,2} + P_{8,3} + P_{8,4} \\ &= 0 + 1 + 4 + 5 + P_{8,4} \\ &= 10 + P_{4,0} + P_{4,1} + P_{4,2} + P_{4,3} + P_{4,4} \\ &= 10 + 0 + 1 + 2 + 1 + 1 = 15. \end{aligned}$$

Wie man sieht, wurde die Summenformel nur so weit angewendet, bis die Anzahlen elementar bestimmt werden können.

2. Wir kodieren die Ziffern  $0, 1, 2, \dots, 9$  entsprechend durch  $1, 2, \dots, 10$  und stellen jede Zahl zwischen 0 und 9999 durch eine Folge von 4 Zahlen aus  $1, 2, \dots, 10$  dar. Die Quersumme dieser Zahldarstellungen ist dann 17. Bekanntlich gibt es  $\binom{17-1}{4-1} = \binom{16}{3} = 560$  geordnete Zahlpartitionen der Zahl 17, bestehend aus 4 positiven natürlichen Zahlen  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Wir müssen davon diejenigen Zahlpartitionen abziehen, in denen ein  $x_i$  größer ist als 10, weil unsere Zahldarstellung dieser Beschränkung unterliegt. Allerdings kann nur höchstens ein  $x_i$  größer sein als 10.

- Es gibt  $4 \cdot \binom{6-1}{3-1} = 4 \cdot 10$  Zahlpartitionen, die eine 11 enthalten.
- Es gibt  $4 \cdot \binom{5-1}{3-1} = 4 \cdot 6$  Zahlpartitionen, die eine 12 enthalten.
- Es gibt  $4 \cdot \binom{4-1}{3-1} = 4 \cdot 3$  Zahlpartitionen, die eine 13 enthalten.
- Es gibt  $4 \cdot \binom{3-1}{3-1} = 4 \cdot 1$  Zahlpartitionen, die eine 14 enthalten.

Im Ergebnis gibt es also folgende Anzahl  $A$  von Zahlen mit Quersumme 13.

$$A = 560 - 4(10 + 6 + 3 + 1) = 480.$$