WS 2012/13

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Strukturen (Prof. Mayr)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2012WS/ds/uebung/

30. Januar 2013

ZÜ XII

Übersicht:

1. Übungsbetrieb: Klausur am 16. Februar

   Termin, Ort, Anmeldung, Ablauf, Code

2. Thema: Eulersche Polyederformel

3. Vorbereitung: auf TA Blatt 14

1. Übungsbetrieb: Klausur am 16. Februar

1.1 Termin und Ort

Zeit:	Samstag, 16. Februar, 11 – 13.30 Uhr
Ort:	Hörsäle MW 0001, MW 2001, MW 1801 MI HS1, Interim HS1.

Bitte mindestens 15 Minuten vor Beginn im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung:
Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 13. Februar.

Die Verteilung auf Sitzplätze wird den Listen zu entnehmen sein, die an den Hörsaaleingängen aushängen werden.

1.2 Anmeldung

Eine Anmeldung für die Endterm
erfolgte über TUMonline oder in Sonderfällen persönlich am Infopoint.

Achtung:

Bei Nichtanmeldung kann nicht garantiert werden, dass Sitzplatz und Klausurunterlagen zur Verfügung stehen!

Alle Teilnehmer der Klausuren müssen sich bei der Ausweiskontrolle im Hörsaal ausweisen können!!

1.3 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen,
außer
einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig)

Fragen während der Klausur sind erlaubt,
aber
Antworten werden, falls notwendig,
nur als Hörsaalansage gegeben.

1.4 Code

Code:								

Bitte 8-stelligen Zifferncode (nicht ausschließlich die Null) eintragen,
falls Sie Ihr Ergebnis frühzeitig erfahren wollen.

2. Thema: Eulersche Polyederformel

Eine der interessantesten Verallgemeinerungen des Begriffs der Bäume, sind die planaren Graphen.

Für planare Graphen $G = (V, E)$ mit der Menge K von Komponenten und der Menge R_i von inneren Gebieten gilt die Eulersche Polyederformel:

$$|E| + |K| = |V| + |R_i| \tag{1}$$

Falls man das äußere Gebiet zu den inneren Gebieten hinzunimmt und die Menge aller Gebiete R betrachtet, dann lautet die Polyederformel wie folgt:

$$|E| + |K| = |V| + |R| - 1 \tag{2}$$

Aufbau planarer Graphen in der Ebene:

	$\lvert E\rvert$	$+$	$\lvert K\rvert$	$=$	$\lvert V\rvert$	$+$	$\lvert R_i\rvert$
$G = \emptyset$:	0	$+$	0	$=$	0	$+$	0
$+\ v$ Knoten :	0	$+$	v	$=$	v	$+$	0
$+\ b$ Brücken :	b	$+$	$v-b$	$=$	v	$+$	0
$+\ t$ Trennkanten :	$b+t$	$+$	$v-b$	$=$	v	$+$	t
Gesamt :	e	$+$	k	$=$	v	$+$	r_i
Einbettung :	e	$+$	k	$=$	v	$+$	$r-1$

Bemerkung:

- In der Zeichenebene kann man jeder Kante 2 Seiten zuordnen.
- Jede Kantenseite grenzt an genau ein Gebiet.
- Für jedes Gebiet kann man die angrenzenden Kantenseiten zählen.
- Die Ebene zerfällt in endlich viele disjunkte Gebiete und deren Ränder.

Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
|E| &\leq 3|V| - 6\,, \\
|E| &\leq 2|V| - 4 \quad \text{(bipartite Graphen)}
\end{aligned}
$$

3. Vorbereitung auf TA Blatt 14

3.1 VA 1

Wir untersuchen den vollständigen bipartiten Graph $K_{3,3}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.
2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Ein *vollständiger bipartiter Graph* $K_{m,n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ ist ein bipartiter Graph mit Knotenmenge $V = V_1 \cup V_2$ und Kantenmenge $E = \{\{a, b\}\,;\, a \in V_1, b \in V_2\}$, wobei V_1 und V_2 disjunkt sind mit $m = |V_1|$ und $n = |V_2|$ Elementen.

Da ein $K_{m,n}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sprechen wir gelegentlich auch von „dem“ Graphen $K_{m,n}$.

1. Geben Sie 2 Unterteilungen des $K_{3,3}$ mit 7 bzw. 8 Knoten an.

Lösung:

Unterteilt man einen Graph $G = (V, E)$, dann ersetzt man eine oder mehrere Kanten $e \in E$ durch jeweils einen neuen Pfad.

Die Zwischenknoten und die Kanten des Pfades sind neu, d. h., nicht schon in G enthalten.

Die ersetzte Kante verschwindet.

Den dabei entstehenden Graph $G' = (V', E')$ nennt man Unterteilung von G. Es gilt dann $e \notin E'$.

Jede Unterteilung G'' von G' ist auch eine Unterteilung von G, wobei G kein Teilgraph ist von G' oder G''.

Sei $e = \{a, b\}$ eine Kante von $(V, E) = K_{3,3}$.

Wir entfernen e aus E und fügen einen neuen Knoten $x \notin V$ zu V und 2 Kanten $\{a, x\}, \{b, x\}$ zu E.

Der erhaltene Graph

$$G' = (V \cup \{x\}\,,\,(E \setminus \{e\}) \cup \{\{a, x\}, \{b, x\}\})$$

ist eine Unterteilung von G mit 7 Knoten.

Es gibt grundsätzlich 2 verschiedene Vorgehensweisen, aus $(V, E) = K_{3,3}$ eine Unterteilung mit 8 Knoten zu erhalten.

(i) Man ersetzt eine Kante $e \in E$ durch einen neuen Pfad der Länge 4 (also mit 2 neuen Knoten).

(ii) Man ersetzt zwei Kanten $e, f \in E$ durch je einen neuen Pfad der Länge 3 (also mit je 1 neuen Knoten).

2. Man beweise: Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine beliebige Kante, dann ist der entstehende Graph planar.

Lösung:

Entfernt man aus dem $K_{3,3}$ eine Kante, dann kann der resultierende Graph R natürlich keine Unterteilung des $K_{3,3}$ mehr enthalten, weil die Anzahl der Kanten dann zu gering ist.

Aber auch eine Unterteilung des K_5 kann nicht mehr in R enthalten sein, weil der K_5 ja 10 Kanten enthält und jede Unterteilung von K_5 mehr als 10 Kanten enthalten müsste.

R ist also nach dem Satz von Kuratowski planar.

3.2 VA 2

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.
2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

Wir beweisen:

1. In jedem nichtleeren planaren Graph gibt es einen Knoten der höchstens Grad 5 hat.

Lösung:

Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph. Dann haben wir zu zeigen, dass ein Knoten x mit $deg(x) \leq 5$ existiert.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, indem wir annehmen, dass alle Knoten aus V mindestens den Grad 6 besitzen, d. h. $deg(x) \geq 6$ gilt, und diese Annahme zum Widerspruch führen.

Sei also $deg(x) \geq 6$ für alle $x \in V$.

Es folgt zunächst $|V| \geq 3$.

Die Summe aller Gradzahlen von Knoten in G ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten, d. h. es gilt

$$\sum_{x \in V} deg(x) = 2 \cdot |E| \,.$$

Mithin gilt

$$2 \cdot |E| = \sum_{x \in V} deg(x) \geq |V| \cdot 6 \,, \quad \text{d. h.} \quad |E| \geq 3|V| \,.$$

Andrerseits gilt für planare Graphen mit mindestens 3 Knoten nach einem Satz über planare Graphen (siehe Buch von Steger)

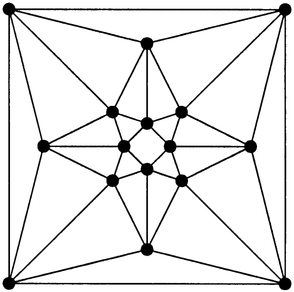
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6 < 3 \cdot |V| \,.$$

Widerspruch!

Wir beweisen:

2. Es gibt einen 5-regulären planaren Graph.

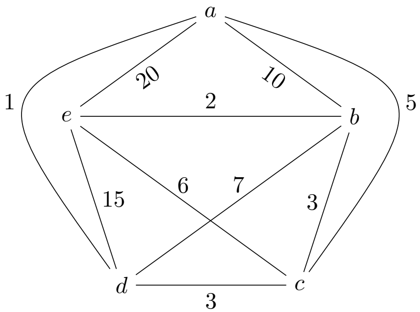
Lösung:



3.3 VA 3

Sei $V = \{a, b, c, d, e\}$. Wir betrachten einen vollständigen Graph $G = (V, E)$ mit Kanten, deren ganzzahlige Gewichte durch die folgende Tabelle definiert sind.

	a	b	c	d	e
a	.	10	5	1	20
b		.	3	7	2
c			.	3	6
d				.	15



1. Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus nach Dijkstra die Entfernung des Knotens a zu allen anderen 4 Knoten von G !
2. In welcher Reihenfolge werden die Entfernungen nach Dijkstra berechnet? Das heißt, in welcher Reihenfolge werden die Knoten aus F entfernt?
   Protokollieren Sie Ihre Berechnungen geeignet!
3. Welcher Pfad verbindet den Knoten a mit Knoten e mit minimaler Gewichtesumme?

Erinnerung : In einem kantengewichteten Graphen ist das Gewicht eines Weges die Summe seiner Kantengewichte. Die Entfernung zwischen zwei Knoten u und v ist dann das minimale Gewicht eines Weges zwischen u und v.

Lösung:

Mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnet man sukzessive die Entfernungen $u_1, u_2, \ldots$ vom Startknoten s aus zu Knoten $k_1, k_2, \ldots$ beginnend bei dem zum Startknoten nächststehenden Knoten.

	a	b	c	d	e
a	.	~~10~~	~~5~~	$\underline{1}$	~~20~~
		~~8~~	$\underline{4}$		~~16~~
		$\underline{7}$			~~10~~
					$\underline{9}$
b	$u_3 = 7$	.	3	7	2
c	$u_2 = 4$		.	3	6
d	$u_1 = 1$			.	15
e	$u_4 = 9$				.

3.4 Tutoraufgabe 2

Die Lösung der Tutoraufgaben von Blatt 14 finden Sie ab Samstag im Netz.

Arbeiten Sie insbesondere Tutoraufgabe 2 vor der Übungsstunde der nächsten Woche selbstständig durch.

Tutoraufgabe 2:

1. Zeigen Sie, dass **kein** zusammenhängender bipartiter Graph B einen vollständigen Graph K_3 als Teilgraph enthält, d. h., dass jeder zusammenhängende bipartite Graph „dreiecksfrei" ist.
2. Geben Sie einen Spannbaum des vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,5}$ an. Nummerieren Sie dabei die Knoten geeignet. (Übersichtliche Zeichnung genügt).
3. Geben Sie einen planaren Teilgraph $B = (V, E)$ des $K_{3,5}$ mit $|V| = 8$ an, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist. (Übersichtliche Zeichnung genügt).

$$|E| = 2|V| - 4\,.$$

4. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Polyederformel (Anzahl der Gebiete ist gleich Anzahl der Kanten minus Anzahl der Knoten plus 2) für zusammenhängende bipartite planare Graphen $B = (V, E)$ falls $|E| \geq 2$ die Ungleichung

$$|E| \leq 2|V| - 4\,.$$

Viel Erfolg bei der Endterm!