Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 4
5. November 2012

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 13. November 2012, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei die Menge (das Alphabet) $\Sigma = \{d, e, f\}$ mit Zeichen d, e und f gegeben, und es sei Σ^* die Menge aller endlichen Wörter über dem Alphabet Σ. Untersuchen Sie die Teilwortrelation $\sqsubseteq \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, die definiert ist durch

$$\sqsubseteq \ := \ \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \ ; \ (\exists y_1, y_2 \in \Sigma^*) \ [y = y_1 x y_2]\}.$$

Dabei bedeutet y_1xy_2 das Wort, das durch Hintereinanderschreiben (Konkatenation) der Wörter y_1, x und y_2 entsteht. Es gilt beispielsweise $ed \sqsubseteq ffdede$, aber $fe \not\sqsubseteq ffdede$. Beachten Sie, dass Σ^* auch das sogenannte leere Wort ε enthält, das als das Wort ohne Buchstaben definiert ist.

1. Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf $\sqsubseteq$ zu: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Sei $B := \{x \in \Sigma^* \ ; \ x \sqsubseteq dedf\}$. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $\sqsubseteq \cap (B \times B)$.

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

1. Man zeige direkt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$: $\quad \dfrac{2^n}{n^2} < \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$.

2. Sei c eine beliebige positive reelle Zahl. Man zeige:

   Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $\quad n^2 < c \cdot 2^n$.

3. Man zeige:

   Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt: $\quad n^{\operatorname{ld} n} < (\operatorname{ld} n)^n$.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Menge der Kubikzahlen n^3 für $n \in \mathbb{N}$ gleichmächtig ist wie die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Konstruieren Sie in Ihrem Beweis eine entsprechende Bijektion.

2. Sei $V = \{a + b\sqrt{5} \ ; \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   Zeigen Sie, dass es eine injektive Abbildung von V in $\mathbb{N}$ gibt.

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

1. $\log_{10} 2$ ist keine rationale Zahl (d. h. $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$).

2. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = a \cdot e^x$ ist für alle $0 < a \in \mathbb{R}$ bijektiv.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $S = \{n \in \mathbb{N}_0 \,;\, n \leq 12\}$.

1. Die Abbildung $f : S \to S$ der Menge S in sich sei gegebenen durch

$$f(n) = \begin{cases} 3 & : \text{falls } n = 0 \\ n - 4 & : \text{falls } n \neq 0 \text{ und } n \text{ teilbar ist durch } 4 \\ n - 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Menge R aller natürlichen Zahlen r, so dass gilt:

$$f^{r+1}(S) = f^r(S)\,.$$

2. Konstruieren Sie eine Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so dass gilt

$$|f(\mathbb{N}_0)| = |\mathbb{N}_0| \quad \text{und} \quad |f^2(\mathbb{N}_0)| < |\mathbb{N}_0|\,.$$

Zusatzaufgabe 1 (Für Interessierte)

1. Zeigen Sie: Jede gerade natürliche Zahl n ist genau dann gleich der Differenz von natürlichen Quadratzahlen $x^2 - y^2$, wenn n durch 4 teilbar ist.

2. Wie viele Arten gibt es, die Zahl 840 als Differenz von natürlichen Quadratzahlen $x^2 - y^2$ darzustellen.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Sei $P(n)$ ein Prädikat für natürliche Zahlen. Die Gültigkeit einer Formel

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n)] \tag{1}$$

mit vollständiger Induktion zu beweisen, heißt, stattdessen die Gültigkeit der folgenden Formel zu zeigen.

$$P(1) \quad \wedge \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]\,. \tag{2}$$

Beim Beweis der Formel (2) geht man wie folgt vor.

Induktionsanfang: Es gilt $P(1)$:
...

Induktionsschritt: Es gilt $(\forall n \in \mathbb{N})\,[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$.

Der Induktionsschritt wird gezeigt durch:

Induktionsannahme: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $P(n)$.

Induktionsschluss: Dann gilt $P(n+1)$:
...

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x$ und $m \in \mathbb{N}_0$ die Bernoullische Ungleichung

$$1 + mx \leq (1+x)^m\,.$$

Geben Sie zunächst ein geeignetes Prädikat $P(n)$ an und führen Sie den Induktionsbeweis für beliebiges x unter der Annahme $-1 < x$ nach dem angegebenen Schema durch.

Vorbereitung 2

Im Folgenden bezeichnet 1 in $o(1)$ die konstante Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}_0$ den Wert 1 besitzt.

1. Man zeige durch Rückführung auf die Definition des Wachstums $o(f(n))$:

$$\frac{1}{n+1} \in o(1)\,.$$

2. Man zeige: Für reellwertige Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(n) \in o(1)\,.$$

Vorbereitung 3

1. Man zeige: $(\log n^2)^2 \in o(2^{\ln n})$.

2. Sei $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$.
   Man zeige $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$.

Tutoraufgabe 1

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, die für $n = 0$ bzw. $n = 1$ die Werte $f(0) = 1$ bzw. $f(1) = 4$ annimmt und für alle $n \geq 1$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$f(n+1) = 4 \cdot (f(n) - f(n-1)) .$$

Man zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(n) = (n+1) \cdot 2^n .$$

Tutoraufgabe 2

1. Für die reellwertigen Funktionen $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 2^n$ und $g(n) = n^2$ gilt $f(n) \notin o(g(n))$, d. h. $(\exists c > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [|f(n)| \geq c \cdot g(n)]$.

   Beweisen Sie diese Eigenschaft, indem Sie für $c = 5$ die folgende Aussage nachweisen:

   $$(\forall n_0 \in \mathbb{N}_0\, \exists n \geq n_0)\, [2^n \geq 5 \cdot n^2] .$$

2. Seien $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen und g habe höchstens endlich viele Nullstellen. Zeigen Sie:

   $$f(n) \in o(|g(n)|) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0 .$$

Tutoraufgabe 3

Ordnen Sie die folgenden Funktionen so an, dass für zwei in der Anordnung aufeinander folgende Funktionen f und g gilt: $f(n) \in o(g(n))$ oder $f(n) \in O(g(n))$. Beweisen Sie Ihre Anordnung. Benutzen Sie ggf. die Monotonieeigenschaften elementarer Funktionen ohne Beweis.

$$f_1(n) = 2^{\ln n}, \qquad f_2(n) = \sqrt{n^2},$$
$$f_3(n) = (\ln n)^{\ln n}, \qquad f_4(n) = (\log n^2)^2 .$$