

---

## Diskrete Strukturen

---

Abgabetermin: 20. November 2012, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

### Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

1. Den folgenden aussagenlogischen Ausdruck bezeichnen wir mit  $F$ :

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r.$$

Konstruieren Sie eine zu  $F$  äquivalente disjunktive Normalform.

2. Eine aussagenlogische Formel  $G$  mit Variablen  $p, q, r$  sei wie folgt in ihrer disjunktiven Normalform gegeben.

$$G = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

Bestimmen Sie eine zu  $G$  äquivalente Formel  $H$  in konjunktiver Normalform.

### Hausaufgabe 2 (8 Punkte)

Sei  $M = \{1, 2, 3\}$ . Für jede binäre Relation  $R$  über  $M$  definieren wir die Eigenschaft von  $R$ , eine *Autorität  $x$  zu enthalten*, wie folgt:

$$(\exists x \in M \forall y \in M) [(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R]. \quad (1)$$

1. Geben Sie eine Relation  $R$  über  $M$  an, die die Formel (1) wahr macht.
2. Wir bezeichnen die Formel (1) mit  $E$ . Geben Sie eine pränex prädikatenlogische Formel an, die äquivalent ist zu  $\neg E$ .
3. Geben Sie eine Relation  $R$  über  $M$  an, so dass  $\neg E$  gilt, d.h., dass die Relation  $R$  keine Autorität  $x$  enthält.
4. Zeigen Sie durch Widerspruchsbeweis, dass für jede transitive Relation  $R$  über  $M$  die Formel (1) wahr ist.

### Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Ist die Formel  $(\forall x \exists y)[P(x, y)] \wedge (\exists u \forall v)[\neg P(u, v)]$  erfüllbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

### Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren wir

$$L_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

1. Zeigen Sie mit direktem Beweis für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} .$$

2. Man zeige mit vollständiger Induktion, dass  $L_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  eine natürliche Zahl ist.

---

**Hinweis:** Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

---

## Vorbereitung 1

Ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  nennt man kongruent modulo  $m$ , mit  $m \in \mathbb{N}$ , i. Z.  $a \equiv b \pmod{m}$  oder  $a \equiv_m b$ , falls sich  $a$  und  $b$  um ein ganzzahliges Vielfaches von  $m$  unterscheiden, d. h., falls es ein  $k \in \mathbb{Z}$  gibt, so dass  $a = b + k \cdot m$  gilt. Diesen Zusammenhang kann man der Definition der Operation  $\text{mod} : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  zugrunde legen:  $b = a \text{ mod } m$  gilt genau dann, wenn  $a \equiv b \pmod{m}$  und gleichzeitig  $0 \leq b < m$  gilt.

Zeigen Sie für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{N}$ :

$$a \equiv a \text{ mod } m \pmod{m}, \quad (1)$$

$$(a + b) \text{ mod } m = [(a \text{ mod } m) + (b \text{ mod } m)] \text{ mod } m, \quad (2)$$

$$(a \cdot b) \text{ mod } m = [(a \text{ mod } m) \cdot (b \text{ mod } m)] \text{ mod } m. \quad (3)$$

In enger Beziehung zur  $\text{mod}$ -Operation steht die ganzzahlige Division  $a \div m$  zweier Zahlen  $a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ . Es gilt

$$a = (a \div m) \cdot m + (a \text{ mod } m).$$

Berechnen Sie: (i)  $5 \div 4$ , (ii)  $(-5) \div 4$ , (iii)  $(-x) \div 1$ .

## Vorbereitung 2

Die Operation  $g \text{ mod } m$  mit  $m \in \mathbb{N}$  über den ganzen Zahlen  $g \in \mathbb{Z}$  eröffnet den Zugang zu zirkulären Operationen. Für  $m = 4$  betrachten wir die folgende Abbildung  $f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$  für alle  $g \in \mathbb{Z}$ :

$$f_4(g) = (g, i^{(g \text{ mod } 4)}).$$

Entwickeln Sie für den Bereich  $g \in [-1, 6]$  mit Hilfe der Gauß'schen Ebene der komplexen Zahlen eine 3-dimensionale graphische Darstellung von  $f_4$ .

## Vorbereitung 3

Seien  $S = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  und für alle  $x, y \in S$

$$x \circ y = x + y + xy.$$

Zeigen Sie, dass die Algebra  $A = (S, \circ)$  bezüglich des binären Operators  $\circ$  eine Gruppe bildet.

## Vorbereitung 4

Sei  $S' = (S, \circ)$  eine Halbgruppe. Dann nennen wir ein Element  $x \in S$  vertauschbar bezüglich  $\circ$ , falls gilt  $(\forall a \in S) [a \circ x = x \circ a]$ . Es sei  $V(S)$  die Menge aller bezüglich  $\circ$  vertauschbaren Elemente von  $S$ .

1. Zeigen Sie die Abgeschlossenheit von  $V(S)$  unter der Verknüpfung  $\circ$ , d. h.:

$$x, y \in V(S) \implies x \circ y \in V(S).$$

2. Nun nehmen wir an, dass  $S'$  eine Gruppe mit Einselement 1 ist. Zeigen Sie, dass die Unterhalbgruppe  $(V(S), \circ_{V(S)})$  von  $S'$  dann ebenfalls eine Gruppe ist.

## Tutoraufgabe 1

Wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1.  $-7 \equiv 8 \pmod{3}$ .
2. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n^2 \pmod{n+1} = 1$ .
3. Sei  $\div$  die ganzzahlige Division. Dann gilt  $(-10) \div 4 = -3$ .

## Tutoraufgabe 2

Die Operation  $g \pmod{m}$  mit  $m \in \mathbb{N}$  über den ganzen Zahlen  $g \in \mathbb{Z}$  eröffnet den Zugang zu zirkulären Operationen. Wir betrachten die folgende Abbildung  $f_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{C}$  für alle  $g \in \mathbb{Z}$ :

$$f_m(g) = \left(g, e^{\frac{2\pi i(g \pmod{m})}{m}}\right).$$

Entwickeln Sie mit Hilfe der Gauß'schen Ebene der komplexen Zahlen eine 3-dimensionale graphische Darstellung von  $f_m$ .

Hinweis: Benützen Sie die Euler'sche Formel  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## Tutoraufgabe 3

Sei  $S$  gleich der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  ( $= 2^X$ ) einer beliebigen Menge  $X$  und sei  $\circ$  für alle  $A, B \subseteq X$  gegeben durch

$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeigen Sie, dass  $A = (S, \circ)$  eine Algebra ist, die bezüglich des binären Operators  $\circ$  eine Gruppe bildet.

## Tutoraufgabe 4

Es sei  $G = (S, \circ, e)$  eine Gruppe mit genau 4 Elementen  $e, a, b, c \in S$ , in der speziell für  $a$  gilt  $a^2 = e$  mit dem neutralen Element  $e$ .

1. Geben Sie zwei verschiedene Gruppen mit obiger Eigenschaft an, indem Sie die zugehörigen Verknüpfungstabellen konstruieren.
2. Zeigen Sie, dass es keine weiteren Gruppen mit obiger Eigenschaft gibt.
3. Wir betrachten jetzt **beliebige** Gruppen mit 4 Elementen.  
Zeigen Sie elementar, dass es in diesen stets ein Element mit Ordnung 2 gibt.