Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Wintersemester 2012/13
Übungsblatt 11
7. Januar 2013

Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 15. Januar 2013, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (3 Punkte)

Wir betrachten die Zeichenmengen $A = \{a, b\}$, $X = \{x, y\}$.
Wie viele Wörter w über $Z = A \cup X$ der Länge $|w| = 6$ gibt es,

1. so dass in w jedes Zeichen aus Z mindestens einmal vorkommt? (Beispiel: $w = xxxbay$)
2. so dass in w von links beginnend zunächst 3 Mal Buchstaben aus A vorkommen gefolgt von 3 Mal Buchstaben aus X? (Beispiel: $w = baayyy$)
3. so dass es in w jeweils 3 Vorkommen von Buchstaben aus A und 3 Vorkommen von Buchstaben aus X gibt? (Beispiel: $w = bxxbax$)

Bekannte Zählfunktionen der Kombinatorik dürfen unausgewertet verwendet werden.

Hausaufgabe 2 (3 Punkte)

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten auf die folgenden Fragen und geben Sie das Ergebnis in Dezimalzahldarstellung an. Wie viele

1. surjektive Abbildungen von M auf N gibt es, wenn $|M| = 6$ und $|N| = 5$ gilt?
2. Möglichkeiten gibt es, 4 gleiche (nicht unterscheidbare) Fußbälle auf 8 unterscheidbare Vereine zu verteilen?
3. Möglichkeiten gibt es, 5 nicht unterscheidbare Gegenstände in 5 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?

Hausaufgabe 3 (3 Punkte)

Wir betrachten 3 völlig gleiche Motorräder, 2 völlig gleiche Personenkraftwagen, und einen Lastkraftwagen.

1. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, 5 völlig gleiche Firmenschilder auf die Fahrzeuge zu verteilen, so dass jedes Fahrzeug höchstens ein Firmenschild erhält?
2. Wie viele Verteilungsmöglichkeiten gibt es, wenn jeder von 5 verschiedenen Personen genau ein Fahrzeug zuzuteilen ist?

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir zählen gewisse Möglichkeiten, Wörter über dem 3-elementigen Alphabet $A = \{a, b, x\}$ zu bilden. Geben Sie alle Ergebnisse in Dezimalzahldarstellung an und begründen Sie Ihre Ergebnisse!

1. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ gibt es, in denen der Buchstabe a höchstens einmal und der Buchstabe b höchstens zweimal vorkommt (z. B. ba, das leere Wort ϵ)?
2. Wie viele Wörter über $\{a, b\}$ der Länge 11 gibt es, in denen genau zweimal der Buchstabe a vorkommt und gleichzeitig mindestens zwei Buchstaben b zwischen den beiden a's auftreten?
3. Wie viele Wörter über A der Länge 6 gibt es, in denen der Buchstabe a einmal, der Buchstabe b zweimal und der Buchstabe x dreimal vorkommt?

Hausaufgabe 5 (2 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen und führen Sie dabei Ihre Antwort auf die Lösungen in der Tabelle der Vorbereitung 4 von Blatt 10 zurück.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 nicht unterscheidbare Gegenstände in 3 nicht unterscheidbare Schachteln zu legen?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in 5 nicht unterscheidbare Pakete 15 gleiche Äpfel zu verteilen, wenn in jedem Paket mindestens 1 Apfel enthalten sein soll?

Hausaufgabe 6 (4 Punkte)

Wir nehmen an, dass in der ersten Sitzreihe in einem Theatersaal nie zwei unmittelbar nebeneinander befindliche Sitzplätze besetzt werden dürfen. Der äußerste linke bzw. rechte Sitzplatz darf ebenfalls nicht besetzt werden. k Personen können also nicht auf n Sitzplätze der ersten Reihe verteilt werden, wenn $n < 2k + 1$ gilt.
Bei Platzverteilungen ist außerdem zu beachten, welche Person welchen Sitzplatz zugewiesen bekommt. Sitzplätze und Personen sind also unterscheidbar, entsprechend gibt es unterschiedliche Platzverteilungen.

1. Seien $n = 6$ und $k = 2$. Wie viele Platzverteilungen der ersten Reihe gibt es?
2. Seien nun $k \geq 1$ und $n \geq 2k + 1$. Geben Sie mit Hilfe bekannter Zählfunktionen der Kombinatorik eine geschlossene Formel für die Anzahl der Möglichkeiten an, k Personen auf n Sitzplätze der ersten Reihe zu verteilen.

   Überprüfen Sie Ihre Formel durch Anwendung auf Teilaufgabe 1!

   Wie viele Sitzplatzverteilungen gibt es für den Fall, dass die Personen nicht unterscheidbar sind?

Zusatzaufgabe 5 (Zählung von Klammerausdrücken)

Um Klammerausdrücke zu zählen, beschränkt man sich auf Ausdrücke ohne Variable und einen einzigen Klammertyp von öffnenden und schließenden Klammern „(“ bzw. „)“. Man betrachtet also eine Menge $K \subseteq \{(,)\}^*$ von Wörtern über der Zeichenmenge $\{(,)\}$, die mit folgenden Regeln ähnlich der Bildung von arithmetischen Ausdrücken erzeugt werden kann. Dabei bezeichne ε das leere Wort. K heißt Menge der korrekten Klammerausdrücke über $\{(,)\}$.

- $\varepsilon \in K$,
- $w \in K \implies (w) \in K$,
- $w_1, w_2 \in K \implies w_1 w_2 \in K$.

Die Anzahl von korrekten Klammerausdrücken mit $n \in \mathbb{N}_0$ öffnenden Klammern heißt Catalan-Zahl C_n.

Wir messen die Länge der Wörter über $\{(,)\}^*$ auf mehrere Arten. Seien $|w|_($ bzw. $|w|_)$ die Anzahl der in w enthaltenen öffnenden bzw. schließenden Klammern.
Wir nennen u ein Anfangsteilwort (Praefix) von w, falls es ein Wort v gibt, so dass $w = uv$ gilt. Wir nennen ein Wort $w \in \{(,)\}^*$ semipositiv, falls $|u|_(\geq |u|_)$ für alle Anfangsteilworte u von w gilt.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass $w \in \{(,)\}^*$ genau dann ein korrekter Klammerausdruck ist, falls w semipositiv ist und $|w|_(= |w|_)$ gilt.

Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen und benutzen Sie dabei insbesondere die Formel zur Lösung des Ballot-Problems aus der Vorlesung.

1. $$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} .$$

2. $$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} .$$

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

In einem Rangierbahnhof gibt es 30 parallel laufende Gleise, auf denen Schwertransporte zusammengestellt werden. Wegen der übermäßigen Breite der Ladung können keine zwei Züge auf benachbarten Gleisen plaziert werden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 (nicht unterscheidbare) Züge auf die Gleise so zu verteilen, dass sich die Züge nicht behindern?

Vorbereitung 2

Sei F die Menge aller Abbildungen einer Menge M in die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir definieren die Summe, i. Z. $f + g$, bzw. das Produkt, i. Z. $f \cdot g$, von $f \in F$ und $g \in F$ als diejenigen komplexwertigen Funktionen h bzw. k, für die für alle $x \in M$ gilt

$$\begin{aligned} h(x) = (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad \text{bzw.} \\ k(x) = (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\,. \end{aligned}$$

Entsprechend führen wir über der Menge der Operatoren über F Addition und Multiplikation wie folgt ein. Für alle $A, B : F \to F$ und $f \in F$ gilt

$$\begin{aligned} (A+B)(f) &= A(f) + B(f) \quad \text{bzw.} \\ (A \cdot B)(f) &= A(f) \cdot B(f)\,. \end{aligned}$$

1. F ist ein Ring bezüglich obiger Addition „+“ und Multiplikation „·“. Beweis!

   Geben Sie die entsprechenden neutralen Elemente bezüglich + und · an.

2. Sei $\circ$ die Komposition von Operatoren. Man zeige für alle Operatoren A, B, C über F:
   $$(A+B) \circ C = A \circ C + B \circ C \qquad \text{(Rechtsdistributivität)}\,.$$

3. Sowohl der Translationsoperator E als auch der Differenzenoperator Δ sind Beispiele für Operatoren über F (wobei $M = \mathbb{Z}$ gilt). Begründung!

Vorbereitung 3

Der Translationsoperator E und der Differenzenoperator Δ sind Beispiele für Operatoren, mit denen man wie in Ringen rechnen kann.

Seien M eine Menge und F die Menge aller Abbildungen von M in die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen wie in VA 2. Sei *op* die Menge aller Operatoren über M und $a \in op$. Dann definieren wir einen Operator A_a über F wie folgt für alle $f \in F$ und $x \in M$:

$$[A_a(f)](x) = f(a(x))\,.$$

Sei $OP = \{A_a\,;\, a \in op\}$.

1. Sei $M = \mathbb{Z}$. Zeigen Sie $E^n \in OP$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

2. Man zeige für alle $a \in op$ und Operatoren B, C über F die Linksdistributivität

$$A_a \circ (B + C) = A_a \circ B + A_a \circ C\,.$$

3. Seien $a_i, b_j \in op$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Man zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_{a_i}\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} B_{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(A_{a_i} \circ B_{b_j})\,.$$

Vorbereitung 4

Man zeige:

1. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\quad \Delta x^{\overline{n}} = n(x+1)^{\overline{n-1}}\,.$
2. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\quad \nabla x^{\underline{n}} = n(x-1)^{\underline{n-1}}\,.$
   Benutzen Sie die Gleichung $E \cdot \nabla = \Delta$ für den Beweis!
3. Es gilt $\nabla\Delta = \Delta\nabla$.

Vorbereitung 5

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k\,.$$

Vorbereitung 6

Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$ mit Binomialinversion:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i} = \delta_{n,i} \qquad .$$

Hierbei ist $\delta_{n,i} = 1$, falls $n = i$, und $\delta_{n,i} = 0$, falls $n \neq i$.

Tutoraufgabe 1

Welche der folgenden Gesetze für die Differenzenoperatoren Δ und ∇, den Translationsoperator E und die Identität I gelten allgemein für beliebige Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $(E\Delta\nabla)(f) = (E)(f)$ (b) $(E\nabla^2)(f) = (E - 2I + E^{-1})(f)$

Tutoraufgabe 2

Berechnen Sie mit Hilfe der Partiellen Summation für $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^{n} k \cdot \binom{k}{m}.$$

Tutoraufgabe 3

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Binomialinversion eine Folge $(a_i)_{i\geq 0}$, so dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$n! = \sum_{i=0}^{n} a_i n^{\underline{i}}.$$

2. Beweisen Sie die folgende Identität für alle $n, i \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} S_{k,i} (-1)^{n-k} = \delta_{n,i}\,.$$

$s_{n,k}$ (bzw. $S_{n,k}$) sind die Stirling-Zahlen erster (bzw. zweiter) Art.