SS 2014

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/

24. April 2014

ZÜ II

Übersicht:

1. Übungsbetrieb	Fragen Neuerungen bei Korrekturen
2. Thema	Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen
3. Vorbereitung	TA Blatt 2
4. Hin.Ti's	HA Blatt 2

1. Übungsbetrieb

Fragen?

Vorschläge?

Neue Korrekturregeln

Ab Blatt 2 wird nach den folgenden Korrekturregeln verfahren:

- Die Abgabe erfolgt wie bei Blatt 1 bis spätestens zu dem Termin, der auf dem Blatt angegeben ist.
- Für jedes Blatt bestimmt der Übungsleiter durch 2-maligen Münzwurf zwei von vier Aufgaben.
  Diese und nur diese werden bei allen Teilnehmern korrigiert.
- Jeder Teilnehmer bekommt das Doppelte der von ihm geleisteten Punkte gutgeschrieben.
- Das Verfahren kann nach rechtzeitiger Ankündigung vor Abgabe des Blattes wieder ausgesetzt werden. In diesem Fall wird dann wieder jede Aufgabe korrigiert.

(Siehe Übungswebseite)

2. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

2.1 Definitionen nach Vorlesung

Die paarweise verschiedenen Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{1}$$

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]. \tag{2}$$

Achtung:

1. Falls für paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ die folgende Gleichung gilt

$$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n]\,, \tag{3}$$

dann gilt nicht notwendigerweise auch für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ die Gleichung

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]\,. \tag{4}$$

Aber:

2. Falls n Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann sind für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ die Variablen $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$ unabhängig, d. h. es gelten für alle $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in W_{X_{i_1}} \times \ldots \times W_{X_{i_k}}$ die Gleichungen

$$\Pr[X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k}] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_{i_k} = x_{i_k}] \,.$$

Insbesondere sind dann für beliebige $x_1, \ldots, x_n$ die Ereignisse

$$A_1 = („X_1 = x_1“), \ \ldots \ , \ A_n = („X_n = x_n“)$$

unabhängig.

Es gilt der folgende Satz, der die Unabhängikeit von Ereignissen und die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen in Zusammenhang bringt.

Zuvor aber die

Definition der Indikatorvariablen (siehe Vorlesung):

Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann heißt die Abbildung $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt, d.h. } x \in A\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Indikatorvariable des Ereignisses A.

Bezüglich des gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes ist jede Indikatorvariable eine Zufallsvariable.

Satz:

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen $I_{A_1}, \ldots, I_{A_n}$ unabhängig sind.

2.2 Konstruktion unabhängiger Ereignisse

Thema ist die allgemeine Konstruktion unabhängiger Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert.

Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.
  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. *Beweis*!
- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i.

  Für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ mit $s_i \in \{0, 1\}$ (siehe Vorlesung)
  und Ereignis $A^s := \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$
  wählen wir
  ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$.

  Wir definieren $A_{k+1} := \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$
  eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. *Beweis*!

3. Vorbereitung auf Tutoraufgaben Blatt 2

3.1 VA 1

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

Konstruktion des Beispiels (Teilaufg. 2):

Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr(x) = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$.

Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.

Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$.

Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

Wir haben nun die Partition

$$\begin{aligned} A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 = [9, 12]\,, \\ A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 = [13, 16]\,, \\ A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} = [1, 8]\,, \\ A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = [17, 24]\,. \end{aligned}$$

Seien
$B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$, $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.

Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

Wir setzen $C = A_3$ und erhalten $\Pr[C] = \frac{1}{4}$.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion (Teilaufg. 1):

Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}
\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s]\cdot\Pr[A^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1}\cdot\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit im 1. Schritt:

Im Fall einer einelementigen Menge von Ereignissen $\{A_1\}$ haben wir nur die Gleichung

$$\Pr\left[\bigcap_{A \in \{A_1\}} A\right] = \prod_{A \in \{A_1\}} \Pr[A]$$

zu beweisen.

Sie gilt trivialerweise.

Unabhängigkeit im $(k+1)$-ten Schritt:

Die Menge der Durchschnitte A^s mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine 2^k-Partition von Ω.

Bei der Konstruktion eines Ereignisses A_{k+1}, so dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen A^s in konstantem Verhältnis p_{k+1} zu $1-p_{k+1}$.

Wir gehen nach Vorlesung vor und zeigen für alle $s \in \{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung

$$\Pr[A^s] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.$$

Falls $s_{k+1} = 1$,

dann gilt $\quad A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap A_{k+1} = B^{(s_1,\ldots,s_k)}$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr\left[B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= p_{k+1} \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= \Pr\left[A_{k+1}^{s_{k+1}}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr\left[A_i^{s_i}\right] .
\end{aligned}$$

Falls $s_{k+1} = 0$,

dann gilt $\quad A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap \overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr\left[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}\right] \\
&= \Pr\left[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= (1 - p_{k+1}) \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= \Pr\left[A_{k+1}^{s_{k+1}}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr\left[A_i^{s_i}\right] .
\end{aligned}$$

3.2 VA 2

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus.
Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. $X :=$
   Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.

Lösung:

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n \cdot Pr[X = n] \\ &= \sum_{n\geq 1} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6\,.\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathbb{E}[X^2] \;=\; \sum_{n\geq 1} n^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n(n-1) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sum_{n\geq 2} n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 60,
\end{aligned}$$

mithin

$$\mathbb{E}[X^2] = 66$$

und

$$\mathsf{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 30.$$

4. Hinweise und Tipps zu HA Blatt 2

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 1:

1. Versuchen Sie es mit $\Pr(0) = 1$.

2. Zerlegen Sie Ω in disjunkte Mengen
   $A = \{n \in \mathbb{N}_0\,;\, n \bmod 2 = 0\}$ und
   $B = \{n \in \mathbb{N}_0\,;\, n \bmod 2 = 1\}$.
   Benutzen Sie mehrfach die geometrische Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} 3^{-i}$.

Fortsetzung siehe Informationsblatt 1.