SS 2014

# Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2014SS/dwt/uebung/

3. Juli 2014

# ZÜ VIII

**Übersicht**:

| | |
|---|---|
| 1. Übungsbetrieb | Klausur, ZÜ Termine<br>Termin, Ort, Anmeldung, Ablauf, Code<br>Termin: Letzte ZÜ |
| 2. Thema | Markov-Ketten<br>Erwartete Übergangszeit<br>Erwartete Rückkehrzeit<br>Ankunftswahrscheinlichkeit<br>Rückkehrwahrscheinlichkeit<br>Beispiel |
| 3. Vorbereitung | TA Blatt 11 |

# 1. Übungsbetrieb

## 1.1 Klausur

Fragen zum Stoff der Endterm?

Klausurergebnisse
Klausureinsicht

## 1.2 Termin und Ort

Zeit: Dienstag, 29. Juli, 11 – 13 Uhr

Ort: Hörsäle MW 2001 (+Galerie), MI HS2, Interim HS1, Physik HS1, Physik HS2.

Bitte mindestens 15 Minuten vor Beginn im Hörsaal erscheinen!

Platzverteilung:
Die Zuordnung der Teilnehmer auf die Hörsäle erfolgt nach Abschnitten des Alphabets siehe Übungswebseite ab 25. Juli.

Die Verteilung auf Sitzplätze wird den Listen zu entnehmen sein, die an den Hörsaaleingängen aushängen werden.

## 1.3 Anmeldung

Eine Anmeldung für die Endterm
erfolgte über TUMonline oder in Sonderfällen persönlich am Infopoint.

Achtung:

Bei Nichtanmeldung kann nicht garantiert werden, dass Sitzplatz und Klausurunterlagen zur Verfügung stehen!

Alle Teilnehmer der Klausuren müssen sich bei der Ausweiskontrolle im Hörsaal ausweisen können!!

## 1.4 Ablauf

Es nicht erlaubt, Unterlagen zu benutzen,
außer
einem persönlich handbeschriebenen DIN A4 Blatt (beidseitig)

Fragen während der Klausur sind erlaubt,
aber
Antworten werden, falls notwendig,
nur als Hörsaalansage gegeben.

## 1.5 Code

| Code: | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Bitte 8-stelligen Zifferncode (nicht ausschließlich die Null) eintragen,
falls Sie Ihr Ergebnis frühzeitig erfahren wollen.

## 1.6 ZÜ Termine

Letzte Zentralübung anstatt der DWT Vorlesung
am 9.Juli, 16 - 17.30 Uhr im MI HS1!

# 2. Thema: Markov-Ketten

## 2.1 Vorbemerkungen

Man beachte, dass Markov-Ketten in der Regel durch Übergangsdiagramme definiert werden.

In den Diagrammen werden nur positive Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen.

Alle übrigen Übergänge haben die Wahrscheinlichkeit 0.

## Zentrale Begriffe:

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit diskreter Zeit, d. h. eine Folge von Zufallsvariablen, die der Markov-Bedingung genügt.
Der Zustandsraum sei $S$.

Man beachte, dass die Ergebnisse, die von einer Markov-Kette angenommen werden können, unendliche Zustandsfolgen $(s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots) \in S^{\mathbb{N}_0} = \Omega$ sind.

Die diskreten Zufallsvariablen $T_{i,j}$ bzw. $T_i$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T_{i,j} = \min\{n \geq 0\,;\, X_n = j, \text{ wenn } X_0 = i\}\,,$$

$$T_i = \min\{n \geq 1\,;\, X_n = i, \text{ wenn } X_0 = i\}\,,$$

heißen Übergangszeit bzw. Rückkehrzeit.

Man beachte:

$T_{i,j}$ und $T_i$ sind bedingte Zufallsvariable, die für Markovketten mit $X_0 \neq i$ undefiniert bleiben können, weil die Gesamtheit dieser Markov-Ketten mit $X_0 \neq i$ in dem durch $X_0 = i$ bedingten Wahrscheinlichkeitsraum ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 darstellt.

Wir entfernen aus $\Omega$ alle Ergebnisfolgen mit $X_0 \neq i$ und definieren den bedingten Ergebnisraum $\Omega_{(X_0=i)} = \Omega \setminus \{(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}\,;\, X_0 \neq i\}$.

Dann gelten

$T_{i,j} : \Omega_{(X_0=i)} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ und $T_i : \Omega_{(X_0=i)} \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

Die Dichtefunktionen $f_{T_{i,j}}$ und $f_{T_i}$ haben also den Definitionsbereich $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

Im Allgemeinen gilt $f_{T_{i,j}}(+\infty) \neq 0$ und $f_{T_i}(+\infty) \neq 0$.

Speziell gilt für alle $x \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$

$$f_{T_{i,i}}(x) = \begin{cases} 1 : x = 0\,, \\ 0 : \text{sonst}\,. \end{cases}$$

## 2.2 Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeit

Auf die Zufallsvariablen $T_{i,j}$ und $T_i$ stützen sich die Begriffe

Ankunftswahrscheinlichkeit bzw. Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$f_{i,j} \quad \text{bzw.} \quad f_i\,.$$

Es gelten $f_{i,j} = \Pr[T_{i,j} < +\infty]$ und $f_i = \Pr[T_i < +\infty]\,.$

Die folgenden Eigenschaften einer Markov-Kette hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab.

Man beachte, dass in das Übergangsdiagramm nur Pfeile mit positiven Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen werden dürfen.

Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} f_i = 0, & 0 < f_i < 1, & f_i = 1, \\ f_{i,j} = 0, & 0 < f_{i,j} < 1, & f_{i,j} = 1\,. \end{array}$$

$f_{i,j} = 0$ bzw. $f_i = 0$:

Es gibt keinen Pfad vom Knoten $i$ nach Knoten $j$ bzw. von $i$ zurück auf sich selbst.

$f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 1$:

Jeder bei $i$ beginnende Pfad kann zu einem Pfad bis zu $j$ bzw. zu $i$ zurück verlängert werden.

$0 < f_{i,j} < 1$ bzw. $0 < f_i < 1$:

Die vorausgegangenen Eigenschaften treffen nicht zu.

Abgeleitete Eigenschaften für Zustände $i \in S$:

$i$ ist transient, falls $f_i < 1$.

$i$ ist rekurrent, falls $f_i = 1$.

$i$ ist absorbierend, falls $f_{i,j} = 0$ für alle $j \neq i$ gilt.

Bemerkung: Auch die Eigenschaften „irreduzibel“, „periodisch“ und „aperiodisch“ hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab.
Folglich gilt Gleiches auch für die Eigenschaft „ergodisch“.

Berechnung der Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeiten:

Bei gegebener zeithomogener diskreter Markov-Kette (Übergangsmatrix) können alle $f_{i,j}$ und $f_i$ durch folgendes Verfahren gefunden werden:

1. Man bestimme, für welche $i, j$ die Gleichungen $f_{i,j} = 0$, $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 0$, $f_i = 1$ gelten.

2. Man löse für die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,, \\ f_i &= p_{i,i} + \sum_{k \neq i} p_{i,k} f_{k,i}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir können die Gleichungen „zeilenweise" lösen.

## 2.3 Erwartungswerte von $T_{i,j}$ und $T_i$

Erwartete Übergangszeit: $h_{i,j} := \mathbb{E}[T_{i,j}]$.

Erwartete Rückkehrzeit: $h_i := \mathbb{E}[T_i]$.

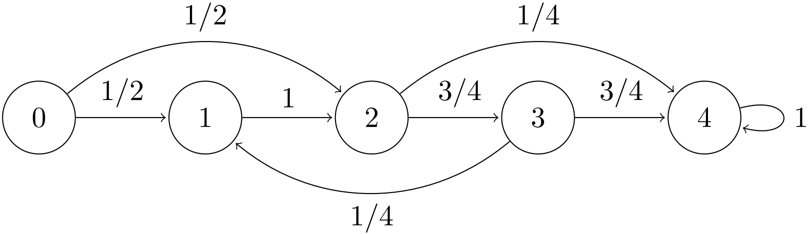
Es gilt:

Falls $|S| < \infty$, dann existieren die Erwartungswerte $h_{i,j}$ bzw. $h_i$ genau dann, wenn $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 1$ gilt.
Die Berechnung erfolgt nach Vorlesung mit Gleichungssystem

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} h_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,, \\ h_i &= 1 + \sum_{k \neq i} p_{i,k} h_{k,i}\,. \end{aligned}$$

## 2.4 Beispiel

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine endliche (zeit)homogene Markov-Kette mit diskreter Zeit über der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Die positiven Übergangswahrscheinlichkeiten seien durch das folgende Übergangsdiagramm gegeben:



1. Geben Sie die Menge der transienten Zustände der Markov-Kette an.
2. Sei $T_{01}$ die Übergangszeit vom Zustand $0$ in den Zustand $1$. Bestimmen Sie $\Pr[T_{01} = n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$!
3. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit $f_{01}$!
4. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit $h_{14}$!

(1) Geben Sie die Menge der transienten Zustände der Markov-Kette an.

Lösung

Ein Zustand $i$ ist transient, falls $f_i < 1$,

d.h. es gibt einen von $i$ ausgehenden Pfad,
der sich nicht zu $i$ zurück verlängern lässt.

Ergebnis: Alle Zustände $\{0, 1, 2, 3\}$ außer Zustand 4 sind transient.

(2) Sei $T_{01}$ die Übergangszeit vom Zustand $0$ in den Zustand $1$. Bestimmen Sie $\Pr[T_{01} = n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

Lösung

$\Pr[T_{01} = 1] = \frac{1}{2}$,

$\Pr[T_{01} = 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$.

Für alle übrigen $n$ gilt $\Pr[T_{01} = n] = 0$.

(3) Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit $f_{01}$!

## Lösung

Aus der Dichte von $T_{01}$ oder mit Hilfe eines Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
f_{01} &= p_{01} + p_{00} f_{01} + p_{02} f_{21} + p_{03} f_{31} + p_{04} f_{41} \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} f_{21}\,, \\
f_{21} &= \tfrac{3}{4} f_{31}\,, \\
f_{31} &= \tfrac{1}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Es folgt $f_{21} = \frac{3}{16}\,,\ f_{01} = \frac{19}{32}\,.$

(4) Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit $h_{14}$ !

## Lösung

Mit Hilfe eines Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} h_{14} &= 1 + p_{10}h_{04} + p_{11}h_{14} + p_{12}h_{24} + p_{13}h_{34} \\ &= 1 + h_{24}\,, \\ h_{24} &= 1 + \tfrac{3}{4}h_{34}\,, \\ h_{34} &= 1 + \tfrac{1}{4}h_{14}\,. \end{aligned}$$

Es folgt $h_{34} = \frac{24}{13}$, $h_{24} = \frac{31}{13}$, $h_{14} = \frac{44}{13}$.

# 3. Vorbereitung

## 3.1 VA 1

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette über den Zuständen $Q = \{0, 1, 2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Die Dichtefunktion von $X_0$, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1, s_2)$.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion $q_1$ von $X_1$.
2. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.
3. Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen $X_0$ und $X_1$.

   Dabei sind $X_0$ und $X_1$ als Zufallsvariable über dem zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, \Pr\rangle$ zu betrachten mit

$$\Omega = \{(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in Q\},$$

$$\Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot \Pr[X_1 = x_1 | X_0 = x_0],$$

$$X_0((x_0, x_1)) = x_0 \qquad \text{und} \qquad X_1((x_0, x_1)) = x_1.$$

(1) Berechnen Sie die Dichtefunktion $q_1$ von $X_1$.

Lösung

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 \cdot P \\ &= (\sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}5) \\ &= (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5) \end{aligned}$$

(2) Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.

Lösung

Für stationäre Lösungen $(s_0, s_1, s_2)$ muss gelten

$$(s_0, s_1, s_2) = (s_0, s_1, s_2) \cdot P$$

mit Nebenbedingung

$$\sum_{i=0}^{2} s_i = 1.$$

Wegen

$$(s_0, s_1, s_2) \cdot P = (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5)$$

folgt

$$(s_0, s_1, s_2) = (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5).$$

(3) Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen $X_0$ und $X_1$.

## Lösung

Es seien $q_0$ und $q_1$ die diskreten Verteilungen von $X_0$ und $X_1$. Für die Unabhängigkeit von $X_0$ und $X_1$ genügt der Nachweis der Gleichung

$$\Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1}$$

für alle $x_0, x_1 \in \{0, 1, 2\}$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
(q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1} &= (q_0)_{x_0} \cdot (q_0 P)_{x_1} \\
&= (q_0)_{x_0} \cdot \left( \sum_{i=0}^{2} (q_0)_i \, p_{i,x_1} \right) \\
&= (q_0)_{x_0} \cdot (p_{x_0,x_1}) \\
&= \Pr[(x_0, x_1)].
\end{aligned}$$

## 3.2 VA 2

1. Wir betrachten Markov-Ketten $M$ mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann $M$ höchstens besitzen? Begründung!
2. Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ?$$
Begründung!
3. Gegeben sei eine Markov-Kette $M$ mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand $i$ zu befinden?

(1) Wir betrachten Markov-Ketten $M$ mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann $M$ höchstens besitzen? Begründung!

## Lösung

Hätte $M$ 6 transiente Zustände, dann würden alle 6 Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit verlassen werden können bei $n > 6$ Übergängen.

Dies ist nicht möglich, weil sich mindestens 1 Zustand nach 6 Übergängen wiederholen muss.

Andererseits gibt es ein Beispiel einer Markovkette, mit einem einzigen absorbierenden Zustand, der von allen anderen 5 Zuständen aus erreichbar ist.

Im Ergebnis ist die maximale Zahl transienter Zustände gleich 5.

(2) Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ?$$

Begründung!

## Lösung

Eine stationäre Verteilung $\pi = (c_1, c_2)$ erfüllt zum einen die Gleichung

$$c_1 + c_2 = 1$$

und ist auch ein Linkseigenvektor von $P$ zum Eigenwert 1, erfüllt also auch die Gleichung

$$\pi = \pi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Die Lösung ergibt sich eindeutig mit

$$c_1 = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{3}{5}\,.$$

Man kann auch ohne Rechnung sehen, dass es höchstens eine einzige Lösung geben kann.

Gäbe es noch eine zweite stationäre Lösung, dann müssten alle Verteilungen stationär sein, denn der Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert 1 wäre dann 2-dimensional.

Offensichtlich aber ist z. B. $q = (1, 0)$ nicht stationär.

(3) Gegeben sei eine Markov-Kette $M$ mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand $i$ zu befinden?

## Lösung

Sei $M = (X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ und $(q_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der entsprechenden Verteilungen der $X_t$. Für eine beliebige Anfangsverteilung $q_0$ gilt bereits $q_t(0) = \Pr[X_t = 0] = \frac{1}{3}$ für alle $t > 0$.
Dies zeigt die folgende Rechnung

$$
\begin{aligned}
q_t(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{t-1}(n) \cdot p_{n,0} \\
&= \underbrace{(q_{t-1}(0) + q_{t-1}(1) + q_{t-1}(2) + \dots)}_{=1} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeit $q_t(n)$, dass $X_t$ im Zustand $n$ ist, ist für alle $n \geq 1$ gegeben durch

$$q_t(n) = q_{t-1}(n-1) \cdot p_{n-1,n} = q_{t-1}(n-1) \cdot \frac{2}{3}\,.$$

Wir erhalten

$$(\forall t \geq n)\ \left[p_t(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\,.$$

Wenn man also den Zeitpunkt $t$ genügend groß wählt, dann wird der Zustand $n$ mit der berechneten Wahrscheinlichkeit angenommen.

# Viel Erfolg bei der Endterm!