Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 11
30. Juni 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 9. Juli 2014, 10 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ kontinuierliche Zufallsvariable, die identisch verteilt und unabhängig sind mit $E[X_i] = 2$ und $\mathrm{Var}[X_i] = 4$. Wir betrachten $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Herleitung.

1. $\lim_{n\to\infty} \Pr[\frac{Y_n}{n} = 2]$.
   Benutzen Sie für Ihre Herleitung nicht den Zentralen Grenzwertsatz.

2. $\lim_{n\to\infty} \Pr[1{,}9 < Y_n < 2{,}1]$.

3. $\lim_{n\to\infty} \Pr[1{,}99 < \frac{Y_n}{n} < 2{,}01]$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei eine Zufallsvariable 'Notenverteilung' N mit diskreten Werten $W_N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Annahme für Wahrscheinlichkeiten $\Pr[N = i] = p_i$:
$p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.05$, $p_3 = 0.2$, $p_4 = 0.4$ und $p_5 = 0.3$.

Zur Prüfung der Hypothese $H_0 : \Pr[N = i] = p_i \ \forall i$,
dass nämlich die angenommenen Wahrscheinlichkeiten alle zutreffen,
wird ein χ^2-Anpassungstest zum Signifikanzniveau 0.1 verwendet.

1. Kann die folgende Häufigkeitsverteilung der Notenvergabe bei $n = 120$ Klausuren abgelehnt werden?

$$h_5 = 41, \quad h_4 = 50, \quad h_3 = 20, \quad h_2 = 5, \quad h_1 = 4\,.$$

2. Für welchen maximalen Wert von $r \geq 0$ kann die folgende Häufigkeitsverteilung noch akzeptiert werden:

$$h_5' = 41 + r, \quad h_4' = 50, \quad h_3' = 20 - r, \quad h_2' = 5, \quad h_1' = 4\,.$$

Hinweis: Den Wert von $\chi^2_{4,\,0.9}$ finden Sie auch in der Tabelle C im Anhang des Buches Schickinger/Steger.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten einen Spielautomaten, der in jedem Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p \geq \frac{3}{4}$ auf Gewinn für den Betreiber entscheidet. Allerdings kommt es vor, dass der Automat aufgrund einer fehlerhaften Verhaltensänderung dauerhaft nur mit Wahrscheinlichkeit $p \leq \frac{1}{4}$ in einem Spiel auf Gewinn entscheidet. Der Betreiber testet den Automaten mit einer Stichprobe von 12 Spielen und nimmt dabei an, dass die Anzahl T des Auftretens eines Gewinns nach dem Satz von DeMoivre als normalverteilte Zufallsvariable angenähert werden darf.

1. Formulieren Sie einen Test zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : p \geq \frac{3}{4}$, die Sie ablehnen, wenn bei 12 Spielen höchstens 6 Mal Gewinn gemacht wird.

   Berechnen Sie näherungsweise den Wert des Fehlers 1. Art.

2. Bestimmen Sie zu Ihrem Test den Wert des Fehlers 2. Art unter der Annahme, dass $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{4}$ ausgeschlossen werden kann.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die folgende Tabelle gibt die Ziehungshäufigkeiten der Superzahlen wieder:

Superzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	140	134	138	133	160	134	133	137	131	128

Wenden Sie den χ^2-Anpassungstest auf die Nullhypothese, dass nämlich die Ziehungswahrscheinlichkeit für jede Superzahl $\frac{1}{10}$ ist, an (Signifikanzniveau 0.1).

Zusatzaufgabe 5 (Wird nicht korrigiert)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Anworten.

1. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die keinen absorbierenden Zustand besitzt.

2. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die nur transiente Zustände besitzt.

Zusatzaufgabe 6 (Wird nicht korrigiert)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Ein transienter Zustand einer Markov-Kette wird mit Wahrscheinlichkeit 1 verlassen.

2. Sei $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ die Übergangsmatrix einer Markov-Kette M mit entsprechenden Zuständen 1 und 2. M sei im Zustand 1. Dann ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, dass irgendwann ein Zustandsübergang in den Zustand 2 erfolgt.

***Hinweis:** Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette über den Zuständen $Q = \{0,1,2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Die Dichtefunktion von X_0, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1, s_2)$.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1.
2. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.
3. Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen X_0 und X_1.

   Dabei sind X_0 und X_1 als Zufallsvariable über dem zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega,\Pr\rangle$ zu betrachten mit

$$\Omega = \{(x_0,x_1) : x_0,x_1 \in Q\}, \quad \Pr[(x_0,x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot \Pr[X_1 = x_1 | X_0 = x_0],$$

$$X_0((x_0,x_1)) = x_0 \qquad \text{und} \qquad X_1((x_0,x_1)) = x_1.$$

Vorbereitung 2

1. Wir betrachten Markov-Ketten M mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann M höchstens besitzen? Begründung!
2. Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ?$$

   Begründung!

3. Gegeben sei eine Markov-Kette M mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0,1,2,\ldots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand i zu befinden?

Tutoraufgabe 1

Zwei Zustände A und B einer Markov-Kette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

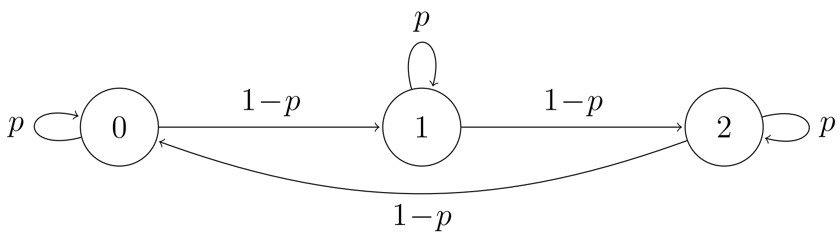
$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient?

2. Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu sein?

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten eine Markov-Kette M mit der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2\}$ und der Folge $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ von Zufallsvariablen, die durch das folgende Übergangsdiagramm in Abhängigkeit eines Parameters p mit $0 < p < 1$ gegeben ist:



1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P von M.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[T_{0,2} = 3]$ an. Dabei sei $T_{0,2}$ die Zufallsvariable der Übergangszeit von Zustand 0 in den Zustand 2.

3. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit $h_{0,2}$. Der Rechenweg muss aus Ihrem Protokoll hervorgehen.

4. Berechnen Sie die stationäre Verteilung q^T von M.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei die Übergangsmatrix P einer Markov-Kette M mit Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$ wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Menge der transienten Zustände. Begründung!

2. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit $f_{0,2}$. Dabei muss jeweils der Rechenweg aus dem Protokoll hervorgehen.