Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

1. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und $L = \{d^k e^m f^n \ ; \ k, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.

   Zeigen Sie, dass die Sprache L kontextfrei ist.

2. Gegeben seien $\Sigma = \{d, e, f\}$ und $L = \{d^m e^m f^n \ ; \ m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}$.

   Zeigen Sie, dass die Sprache L ein Durchschnitt kontextfreier Sprachen ist.

Lösung

1. Es wäre ungeschickt, für L eine kontextfreie Grammatik zu konstruieren. Besser ist es, die Abgeschlossenheit der Klasse der kontextfreien Sprachen zu benutzen.

   Wir stellen L dar durch $L = L_1(L_2 \bigcup L_3)$, wobei wir definieren

$$\begin{aligned} L_1 &= \{d^k \,;\, k \in \mathbb{N}\}\,, \\ L_2 &= \{e^m f^n \,;\, m, n \in \mathbb{N}, m < n\}\,, \\ L_3 &= \{e^m f^n \,;\, m, n \in \mathbb{N}, m > n\}\,. \end{aligned}$$

   L_1 ist wegen $L_1 = L(d^*)$ regulär, also auch kontextfrei.

   L_2 wird erzeugt durch die kontextfreie Grammatik G_2 mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\to eSf \mid T, \\ T &\to Tf \mid f. \end{aligned}$$

   L_2 ist also kontextfrei. Analog wird mit Produktionen $T \to eT \mid e$ gezeigt, dass L_3 kontextfrei ist. Da alle L_i kontextfrei sind, ist auch L kontextfrei.

2. Mit

$$\begin{aligned} L_1 &= \{d^k e^m f^n \,;\, k, m, n \in \mathbb{N}, m \neq n\}\,, \\ L_2 &= \{d^m e^m f^k \,;\, k, m \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

   gilt

$$L = L_1 \cap L_2\,.$$

   Nach Teilaufgabe 1 ist L_1 kontextfrei. Für L_2 gilt $L_2 = L_3 L_4$ mit

$$\begin{aligned} L_3 &= \{d^m e^m \,;\, m \in \mathbb{N}\}\,, \\ L_4 &= \{f^k \,;\, k \in \mathbb{N}\}\,. \end{aligned}$$

   L_3 ist bekanntlich kontextfrei. $L_4 = L(f^*)$ ist ebenfalls kontextfrei. Also ist auch die Konkatenation $L_2 = L_3 L_4$ kontextfrei.

Vorbereitung 2

(Wiederholungsaufgabe)
Wandeln Sie die durch folgende Produktionen gegebene Grammatik mit Startsymbol S in Chomsky-Normalform um:

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & 0A0 \mid 1B1 \mid BB\,, \\ A & \rightarrow & D\,, \quad\quad B \;\rightarrow\; S \mid A\,, \\ C & \rightarrow & S \mid \epsilon\,, \quad D \;\rightarrow\; C\,. \end{array}$$

Lösung

Wir können Variablen mit nur einer einzigen Produktion durch "Anwendung" spracherhaltend eliminieren. Somit vereinfachen wir die Grammatik zunächst zu

$$S \rightarrow 0A0 \mid 1B1 \mid BB\,, \quad A \rightarrow C\,, \quad B \rightarrow S \mid A\,, \quad C \rightarrow S \mid \epsilon\,.$$

und schließlich zu

$$S \rightarrow 0C0 \mid 1B1 \mid BB\,, \quad B \rightarrow S \mid C\,, \quad C \rightarrow S \mid \epsilon\,.$$

Nun eliminieren wir die ϵ-Produktionen. Dazu bauen wir die Menge P' wie in Lemma 12 auf. Wir müssen die Produktionen $S \rightarrow 00,\ S \rightarrow 11,\ S \rightarrow B$ zu P (ohne ϵ-Produktionen) hinzufügen und erhalten

$$S \rightarrow 0C0 \mid 00 \mid 1B1 \mid 11 \mid BB \mid B\,, \quad B \rightarrow S \mid C\,, \quad C \rightarrow S\,.$$

Die Produktionen $T \rightarrow \epsilon \mid S$ fügt man hinzu, wenn die Sprache ϵ enthält, was hier der Fall ist, und erklärt in diesem Fall T zum Axiom.

Wir eliminieren jetzt die Kettenproduktion $C \rightarrow S$, da die Variable C nur in einer einzigen Produktion links vorkommt, und zwar zunächst durch Ersetzen von C, d.h. Anwendung von $C \rightarrow S$.

$$S \rightarrow 0S0 \mid 00 \mid 1B1 \mid 11 \mid BB \mid B\,, \quad B \rightarrow S\,.$$

Die Kettenproduktion $B \rightarrow S$ tritt nun ebenfalls links nur in einer einzigen Produktion auf und kann durch Anwendung eliminiert werden, wie folgt.

$$S \rightarrow 0S0 \mid 00 \mid 1S1 \mid 11 \mid SS \mid S\,.$$

$S \rightarrow S$ kann entfernt werden:

$$S \rightarrow 0S0 \mid 00 \mid 1S1 \mid 11 \mid SS\,.$$

Nun erst wenden wir den Algorithmus der Vorlesung im Abschnitt 4.2 an.

Im ersten Schritt führen wir neue Variablen N und E für 0 bzw. 1 ein:

$$S \rightarrow NSN \mid NN \mid ESE \mid EE \mid SS\,, \quad N \rightarrow 0\,, \quad E \rightarrow 1\,.$$

Die Dreier-Produktionen eliminieren wir, indem wir Zwischensymbole T_1 und T_2 einfügen:

$$S \rightarrow NT_1 \mid NN \mid ET_2 \mid EE \mid SS\,, \quad T_1 \rightarrow SN\,, \quad T_2 \rightarrow SE\,, \quad N \rightarrow 0\,, \quad E \rightarrow 1\,.$$

Diese Grammatik ist nun in Chomsky-Normalform und beschreibt dieselbe Sprache, ausgenommen dem ϵ.

Da das leere Wort in der Sprache ist, fügen wir die Produktionen $T \rightarrow \epsilon \mid \alpha$ für jede rechte Seite α einer Produktion $S \rightarrow \alpha$ hinzu und erklären T zum Axiom, ohne die Eigenschaft der Grammatik, in Chomsky-Normalform zu sein, zu verletzen.

Bemerkung: Durch die Eliminationsschritte zur Beseitigung der Kettenproduktionen entfällt der aufwendige Schritt 3 im Algorithmus der Vorlesung zur Konstruktion einer Grammatik in Chomsky-Normalform.