Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Überführen Sie die folgende Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, \{S \to XX, S \to a, X \to SS, X \to b\}, X)\,.$$

Lösung

Wir stellen zunächst fest, dass G eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform ist. X ist das Axiom von G und $\epsilon \notin L(G)$. Offenbar enthält G keine nutzlosen Variablen. Wir wenden das im Beweis von Satz 84 der Vorlesung gegebene Verfahren zur Konstruktion der Greibach-Normalform an.

Vorab nummerieren wir die Variablen, indem wir sie (willkürlich) als A_1, A_2 umbezeichnen. Die Variable S soll jetzt dem A_1 und X dem A_2 entsprechen. Eventuell notwendig werdende zusätzliche Variablen werden dann mit $A_3, \ldots$ bezeichnet. Die Anzahl der Variablen ist also zunächst $m = m_0 = 2$. Der Wert von m wird dann nach Bedarf erhöht.

Im ersten Schritt der Konstruktion wird eine Schleife von $k = 1, 2, \ldots, m$ durchlaufen, die sicherstellt, dass für alle Produktionen der Form $A_i \to A_j\alpha$ mit $1 \leq i, j \leq m$ stets $i < j$ gilt. Damit gilt dann bereits, dass jede A_m-Produktion mit einem Terminalzeichen beginnt. Im zweiten Schritt der Konstruktion wenden wir Lemma 82 beginnend mit A_{m_0-1} genügend oft an, um zu erreichen, dass jede Produktion mit einem Terminalzeichen beginnt.

1. Schritt:
Wir starten mit den Produktionen

A_1-Produktionen:	A_1	$\to$	$A_2A_2 \mid a$
A_2-Produktionen:	A_2	$\to$	$A_1A_1 \mid b$

Die A_1-Produktionen sind alle in der gewünschten Form, d. h. für $k = 1$ ist nichts zu tun und wir gehen sofort zu $k = 2$ über.
Die A_2-Produktionen sind nicht alle in der gewünschten Form. Die erste der beiden Produktionen muss nach Lemma 82 ersetzt werden durch alle Produktionen, die man durch Anwendung der A_1-Produktionen auf die erste A_1 Variable in $A_2 \to A_1A_1$ erhält. Dies ergibt die neue Produktionenmenge

A_1-Produktionen:	A_1	$\to$	$A_2A_2 \mid a$
A_2-Produktionen:	A_2	$\to$	$A_2A_2A_1 \mid aA_1 \mid b$

Nun ist die linksrekursive A_2-Produktion mit Lemma 82 zu eliminieren. Um zu verdeutlichen, wie dies geschieht, führen wir die entsprechenden Bezeichnungen ein, also $\alpha_1 = A_2A_1$ und $\beta_1 = aA_1, \beta_2 = b$. Die laut Lemma 82 neu einzuführende Variable B bezeichnen wir mit A_3, wobei wir m inkrementieren, also $m = 3$ setzen. Die Linksrekursion ist nun zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} A_2 &\to \beta_1A_3 \mid \beta_2A_3 \\ A_3 &\to \alpha_1 \mid \alpha_1A_3 \end{aligned}$$

Als Ergebnis für $k = 2$ erhalten wir

A_1-Produktionen:	A_1	$\rightarrow$	$A_2A_2 \mid a$
A_2-Produktionen:	A_2	$\rightarrow$	$aA_1A_3 \mid bA_3 \mid aA_1 \mid b$
	A_3	$\rightarrow$	$A_2A_1 \mid A_2A_1A_3$

Nun setzen wir $k = 3$. Die A_3-Produktionen sind nicht in der gewünschten Form. Die zwei Produktionen müssen nach Lemma 82 ersetzt werden durch die Menge der Produktionen, die man durch Anwendung der A_2-Produktionen auf die erste Variable in den A_3-Produktionen erhält. Dies ergibt für $k = 3$ die neue Produktionenmenge

A_1-Produktionen:	A_1	$\rightarrow$	$A_2A_2 \mid a$
A_2-Produktionen:	A_2	$\rightarrow$	$aA_1A_3 \mid bA_3 \mid aA_1 \mid b$
A_3-Produktionen:	A_3	$\rightarrow$	$aA_1A_3A_1 \mid bA_3A_1 \mid aA_1A_1 \mid bA_1 \mid$
			$aA_1A_3A_1A_3 \mid bA_3A_1A_3 \mid aA_1A_1A_3 \mid bA_1A_3$

Man beachte, dass für die neuen Variablen, wie z. B. A_3, keine linksrekursiven Produktionen vorhanden sein können. Deshalb sind wir bereits mit dem ersten Schritt fertig.

2. Schritt:
Man beachte, dass alle A_k-Produktionen mit $k \geq m_0$ notwendigerweise bereits mit einem Terminalzeichen beginnen. Es bleibt in unserem Fall also lediglich die Anwendung von Lemma 82 auf die A_1 Produktionen, hier also auf $A_1 \rightarrow A_2A_2$, wobei alle A_2-Produktionen auf das erste A_2-Vorkommen angewendet werden müssen. Wir erhalten als Menge der A_1-Produktionen

A_1-Produktionen:	A_1	$\rightarrow$	$aA_1A_3A_2 \mid bA_3A_2 \mid aA_1A_2 \mid bA_2 \mid a$

Diese bilden zusammen mit den A_2- und A_3-Produktionen aus dem 1. Schritt das Endergebnis.

Vorbereitung 2

Sei $K = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, F, \delta)$ ein Kellerautomat mit Startzustand $q_0 \in Q$, Startkellerzeichen $Z_0 \in \Delta$, Menge $F \subseteq Q$ von akzeptierenden Zuständen und der Übergangsfunktion δ. Eine Folge $(p_0, w_0, \gamma_0), (p_1, w_1, \gamma_1), \ldots, (p_k, w_k, \gamma_k)$ mit nicht leerem γ_0 heiße Berechnung der Konfiguration (p_0, w_0, γ_0) mit $k \in \mathbb{N}_0$ Schritten, falls gilt

$$(p_0, w_0, \gamma_0) \rightarrow (p_1, w_1, \gamma_1) \rightarrow \ \ldots \ \rightarrow (p_k, w_k, \gamma_k)\,.$$

Falls für $c = (p, w, \gamma)$ keine Berechnung mit $k > 0$ Schritten existiert, dann nennen wir c eine Endkonfiguration

Wir nehmen nun an, dass K ein deterministischer Kellerautomat in Normalform ist. Man zeige:

1. Für alle $w \in \Sigma^*$ gibt es genau eine Berechnung $(q_0, w, Z_0), (p_1, w_1, \gamma_1), \ldots, (p_k, \epsilon, \gamma_k)$, so dass $(p_k, \epsilon, \gamma_k)$ eine Endkonfiguration ist. Für diese Berechnung gilt $\gamma_i \neq \lambda$ mit leerem Wort $\lambda \in \Delta^*$.

2. Es gibt eindeutige Funktionen $\sigma : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\eta : \Sigma^* \rightarrow Q$ und $\kappa : \Sigma^* \rightarrow \Delta^+$, so dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt

   $(\eta(w), \epsilon, \kappa(w))$ ist Endkonfiguration einer Berechnung von (q_0, w, Z_0) mit $\sigma(w)$ Schritten.

Lösung

<u>Erinnerung:</u> Für die Relation der direkten Berechnung $\rightarrow$ in einem Schritt über der Menge der Konfigurationen gilt $(p, u, \gamma) \rightarrow (q, u', \gamma')$ genau dann, wenn $u = au'$ mit $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, $\gamma = Z\alpha$ mit $Z \in \Delta$, $\gamma' = \beta\alpha$ und $(q, \beta) \in \delta(p, a, Z)$ gilt. Dabei ist $u \in \Sigma^*$ und $\alpha, \beta, \gamma' \in \Delta^*$. Die transitive Hülle von $\rightarrow$ wird mit $\rightarrow^*$ notiert.

1. Sei (q_0, w, Z_0) eine Endkonfiguration. Dann muss $w = \epsilon$ und $\delta(q_0, \epsilon, Z_0) = \emptyset$ gelten. Wenn $w = aw'$ mit $a \in \Sigma$ gelten würde, dann würde K das Zeichen a oder ϵ lesen, weil K in Normalform ist. Wenn $\delta(q_0, \epsilon, Z_0) \neq \emptyset$ wäre, dann gäbe es einen weiteren Berechnungsschritt.

   Entsprechend sei $(q_0, w, Z_0), (p_1, w_1, \gamma_1), \ldots, (p_i, w_i, \gamma_i)$ eine eindeutige Berechnung von (q_0, w, Z_0) mit i Schritten. Falls (p_i, w_i, γ_i) keine Endkonfiguration ist, dann gibt es in K eine eindeutige Fortsetzung der Berechnung mit $i + 1$ Schritten. Falls (p_i, w_i, γ_i) eine Endkonfiguration ist, dann gilt $w_i = \epsilon$ und $\delta(p_i, \epsilon, \gamma_i) = \emptyset$ (Halt durch Ende der Eingabe) mit analogem Beweis wie im Fall (q_0, w, Z_0). In diesem Fall folgt nun $\gamma \neq \lambda$, da sonst die Konfiguration (q_0, wa, Z_0) mit $a \in \Sigma$ nicht berechenbar wäre im Widerspruch zur Normalform von K.

2. Da bei Normalform keine unendliche Berechnung existiert, gibt es für alle Startkonfigurationen (q_0, w, Z_0) genau eine Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, so dass die Berechnung im k-ten Schritt mit Endkonfigiration (p_k, w_k, γ_k). Wie oben bewiesen folgt $w_k = \epsilon$ und $\gamma_k \neq \lambda$ endet.

   Wir setzen $\sigma(w) = k$, $\eta(w) = p_k$ und $\kappa(w) = \gamma_k$.

Vorbereitung 3

Man beweise die folgende Aussage:

Für alle deterministischen kontextfreien Sprachen L gilt, dass es genau dann einen deterministischen Kellerautomaten gibt, der L mit leerem Keller akzeptiert, wenn L die Präfixbedingung erfüllt.

Lösung

$\Rightarrow$:
Sei K ein deterministischer Kellerautomat, der L mit leerem Keller akzeptiert. Wir zeigen die Präfixbedingung durch Widerspruch.

Seien $u, uv \in L$ mit $v \neq \epsilon$. Nach Eingabe von uv durchläuft der Automat zunächst alle Konfigurationen, die durch Eingabe von u veranlasst werden. Da K deterministisch ist und u durch leeren Keller akzeptiert wird, ist nun der Keller leer. Eine weitere Eingabe von $v \neq \epsilon$ wir nicht mehr verarbeitet, weil die Übergangsfunktion nicht definiert ist, wenn der Keller leer ist.

$\Leftarrow$:
Wir modifizieren den Beweis des Satzes 88 der Vorlesung.
Sei $K = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta, F)$ ein deterministischer Kellerautomat, der L mit Endzustand akzeptiert. L erfülle die Präfixbedingung. Wir konstruieren einen DPDA $K' = (Q', \Sigma, \Delta', q_0', Z_0', \delta')$, der L mit leerem Keller akzeptiert, so dass K' den Keller K simuliert und bei Erreichen eines Endzustands den Keller leert, wie folgt.

Seien $Q' = Q \cup \{\bar{q}, q_0'\}$, $\Delta' = \Delta \cup \{Z_0'\}$. Wir definieren
$\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') = (q_0, Z_0 Z_0')$,
$\delta'(q, \epsilon, Z) = (\bar{q}, \epsilon)$ für alle $q \in F$, $Z \in \Delta'$,
$\delta'(\bar{q}, \epsilon, Z) = (\bar{q}, \epsilon)$ für alle $Z \in \Delta'$ und
$\delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$ für alle $q \in Q \setminus F$, $a \in \Sigma$, $Z \in \Delta$.

Offenbar ist K' deterministisch. Die Präfixbedingung für L bewirkt, dass K und K' die gleiche Sprache akzeptieren.