Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Übungsblatt 8
8. Juni 2015

Theoretische Informatik

Abgabetermin: 15. Juni 2015, 13 Uhr in die **THEO Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die Produktionen einer Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit $V = \{S, X, A, B\}$ seien wie folgt gegeben.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AXSB \mid AXB\,, \\ X &\rightarrow a \mid SA \mid AX\,. \\ A &\rightarrow a\,,\ B \rightarrow b\,. \end{aligned}$$

1. Alle Nichtterminalen aus V sind nützlich in der Grammatik G. Begründen Sie diesen Sachverhalt.
2. Für $w \in \{a, b\}^*$ bezeichne $|w|_a$ bzw. $|w|_b$ die Anzahl von Vorkommen von a bzw. b in w.

   Zeigen Sie für alle $w \in L(G)$, dass gilt $|w|_a \geq 2\cdot|w|_b$.
3. Geben Sie eine Linksableitung von $w = aaaabb$ aus S an?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $K = (\{p, q\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ ein Kellerautomat mit folgender Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta(q, 0, Z_0) &= \{(q, XZ_0)\}\,, & \delta(q, 0, X) &= \{(q, XX)\}\,, \\ \delta(q, 1, X) &= \{(q, X)\}\,, & \delta(q, \epsilon, X) &= \{(p, \epsilon)\}\,, \\ \delta(p, \epsilon, X) &= \{(p, \epsilon)\}\,, & \delta(p, 1, X) &= \{(p, XX)\}\,, \\ \delta(p, 1, Z_0) &= \{(p, \epsilon)\}\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie, ausgehend von der Anfangskonfiguration (q, w, Z_0), alle mit folgenden Eingaben erreichbaren Konfigurationen:

i) 01, ii) 0011.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

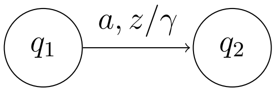
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$L = \{w \in \Sigma^*\,;\, w = uav, u, v \in \Sigma^*, |u|_a = |v|_b\}\,.$$

1. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ an mit $L_G = L$.
2. Leiten Sie nach Satz der Vorlesung systematisch einen zu G äquivalenten Kellerautomaten K her.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Ein <u>Queue-Automat</u> (kurz: QA) ist ein Tupel $A = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, z_0, \delta)$. Dabei sind Q (Zustandsmenge), Σ (Eingabealphabet) und Γ (Queuealphabet) endliche Mengen, $q_0 \in Q$ ist der Startzustand, und $z_0 \in \Gamma$ beschreibt die initiale Queue. Die Übergangsfunktion δ hat den Typ $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$. Graphisch kann eine Transition $(q_2, \gamma) \in \delta(q_1, a, z)$ eines Queue-Automaten wie folgt dargestellt werden:



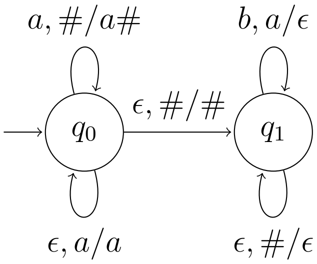
Eine <u>Konfiguration</u> eines Queue-Automaten ist ein Tripel $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$. Dabei ist q der aktuelle Zustand, w das noch zu lesende Wort und γ der aktuelle Inhalt der Queue. Daraus ergibt sich die Übergangsrelation $\to_A$ zwischen Konfigurationen:

$$(q, bw, z\gamma) \to_A (q', w, \gamma\gamma'), \qquad \text{wenn} \qquad (q', \gamma') \in \delta(q, b, z)\,.$$

Die (mit leerer Queue) akzeptierte Sprache eines Queue-Automaten ist

$$L_\epsilon(A) = \{w \in \Sigma^*\,;\, \exists q' \in Q.\ (q_0, w, z_0) \to_A^* (q', \epsilon, \epsilon)\}\,.$$

1. Der Queue-Automat $A_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{a, b, \#\}, q_0, \#, \delta)$ sei wie folgt graphisch dargestellt:



   Geben Sie eine <u>akzeptierende</u> Konfigurationsfolge für das Eingabewort $aabb$ an.

2. Geben Sie einen Queue-Automaten A_2 an mit $L(A_2) = \{ww^R\,;\, w \in \{a, b\}^*\}$.

Zusatzaufgabe 5 (wird nicht korrigiert)

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{lcllcl}
\delta(q, \epsilon, Z_0) & = & \{(q, XZ)\}\,, & \delta(q, a, X) & = & \{(q, XY)\}\,, \\
\delta(q, \#, X) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, & \delta(q, b, Y) & = & \{(q, \epsilon)\}\,, \\
\delta(q, a, Z) & = & \{(q, \epsilon)\}\,. & & &
\end{array}$$

Leiten Sie eine Grammatik G her, die $L_\epsilon(K)$ erzeugt. Die Korrektheit von G muss durch systematische Anwendung einer geeigneten Methode sichergestellt werden.

<u>Hinweis</u>: $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ ist eine Kurzschreibweise für $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta, \emptyset)$.

***Hinweis:** Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie:
Wenn L_1 kontextfrei ist und L_2 regulär, dann ist $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.
Hinweis: Konstruieren sie aus einem PDA und einem DFA/NFA einen neuen PDA.

Vorbereitung 2

Die Produktionen einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} &S \to A\,, && A \to E \mid E + A \mid E - (A)\,, \\ &E \to P \mid P \times E \mid E/P\,, && P \to (A) \mid a\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie durch Anwendung von Earley's Algorithmus, dass $a \times a - (a + a) \in L(G)$ gilt.

Vorbereitung 3

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen:

1. Gibt es eine Turingmaschine, die sich nie mehr als vier Schritte vom Startzustand entfernt und eine unendliche Sprache akzeptiert? Begründung!

2. Welche Sprachen lassen sich mit Turingmaschinen, die ihren Kopf immer nur nach rechts bewegen, erkennen?

3. Gibt es für jede Turingmaschine T eine Turingmaschine T' mit nur einem Zustand, die die Sprache von T akzeptiert?

Vorbereitung 4

Wir konstruieren eine Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, mit $\Sigma = \{|\}$ wie folgt.

Zu Beginn steht, außer Leerzeichen, nur eine Sequenz von Strichen auf dem Band. Der Schreib-/Lesekopf der Turing-Maschine steht auf dem ersten Strich (von links gesehen). Die Berechnung erfolgt, indem jeweils der erste Strich (von links gesehen) durch ein Hilfszeichen X ersetzt wird und zusätzlich ein Hilfszeichen X an das linke Ende geschrieben wird. Zum Schluß werden alle Hilfszeichen von rechts nach links durch Striche ersetzt.
Sei $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{|\}$, $\Gamma = \{|, X, \Box\}$ und $F = \{q_3\}$.
Die Übergangsfunktion δ entnehmen wir der folgenden Tabelle:

Übergang	Kommentar
$\delta(q_0, \|) = (q_1, X, L)$	ersetze erstes | durch Hilfszeichen X
$\delta(q_1, X) = (q_1, X, L)$	gehe nach links zum ersten X
$\delta(q_1, \Box) = (q_0, X, R)$	füge zusätzliches Hilfszeichen X am Anfang ein
$\delta(q_0, X) = (q_0, X, R)$	gehe nach rechts zum ersten |
$\delta(q_0, \Box) = (q_2, \Box, L)$	alle | abgearbeitet
$\delta(q_2, X) = (q_2, \|, L)$	ersetze X durch |
$\delta(q_2, \Box) = (q_3, \Box, R)$	alle X durch | ersetzt, Stopp

Spezifizieren Sie möglichst knapp den Bandinhalt in Abhängigkeit der Eingabe, wenn die Turingmaschine anhält.

Tutoraufgabe 1

1. Zeigen Sie: Die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^* \,;\, w \text{ enthält gleich viele Nullen und Einsen}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

2. Die Sprache $L = \{a^n b^n \,;\, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a^n b^{2n} \,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist zwar kontextfrei, sie ist aber keine deterministisch kontextfreie Sprache. Beweisen Sie dies durch Widerspruch, indem Sie annehmen, dass es einen DPDA M gibt, der L erkennt, und dann mit modifizierten Kopien M' und M'' von M einen DPDA $\tilde{M}$ konstruieren, der die Sprache $\{a^n b^n c^n \,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ erkennt.

Tutoraufgabe 2

Geben Sie eine deterministische Turingmaschine $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ an, mit $\Sigma = \{|\}$, die eine eingegebene Strichzahl verdoppelt.
Begründen Sie, warum Ihre Turingmaschine die Spezifikation erfüllt.

Tutoraufgabe 3

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Wir bezeichnen mit $\overline{w}$ die Negation eines Wortes $w \in \{0,1\}^*$, d.h. alle Nullen werden durch Einsen ersetzt und umgekehrt.

1. Geben Sie eine deterministische Turingmaschine an, die für ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ folgende Berechnung durchführt: Am Ende der Berechnung steht auf dem Band das Wort $w\overline{w}$ und der Kopf steht in einem Endzustand auf dem ersten Zeichen dieses Wortes.

   Kommentieren Sie ihre Konstruktion durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

2. Geben Sie nun eine Turingmaschine an, die die Sprache $L = \{w\overline{w} \,;\, w \in \Sigma^*\}$ akzeptiert. Kommentieren Sie wiederum ihre Konstruktion durch eine informelle Beschreibung Ihrer Lösungsidee.

Tutoraufgabe 4

Sei Σ ein Alphabet. Geben Sie für die kontextsensitive Sprache $L = \{ww \,;\, w \in \Sigma^*\}$ einen linear beschränkten Automaten M an, der L akzeptiert.